

FLUJO A TRAVES DE CINCO TIPOS DIFERENTES DE ABERTURAS,
ANALIZADAS MEDIANTE TEORIA DE LINEAS DE CORRIENTE LIBRES

por Gerardo Hiriart Le Bert (*)

I.- PRESENTACION DEL PROBLEMA :

A continuación se presenta un estudio de cinco casos de flujo a través de diferentes tipos de aberturas, analizadas mediante el uso de teoría de líneas de corriente libres para llegar finalmente a determinar el coeficiente de contracción del chorro resultante y el ángulo de deflexión de éste para diferentes condiciones.

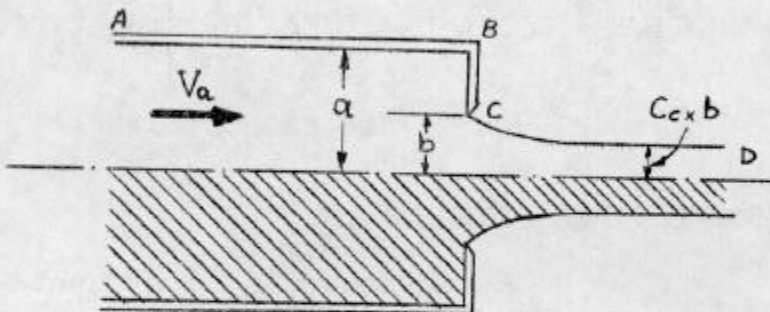
II.- APROXIMACIONES Y SUPOSICIONES :

Para poder aplicar dicha teoría se ha asumido que el flujo es incompresible, irrotacional, en dos dimensiones y se han despreciado los efectos gravitacionales y viscosos. Se supone que en las líneas de corriente libres la presión y por tanto la velocidad se mantienen constantes.

Los casos que se exponen pueden ser modificados para flujo compresible haciendo uso de la ecuación de Chaplygin.

(*) Teniente 1º de la Armada de Chile.

III.- CASO I :

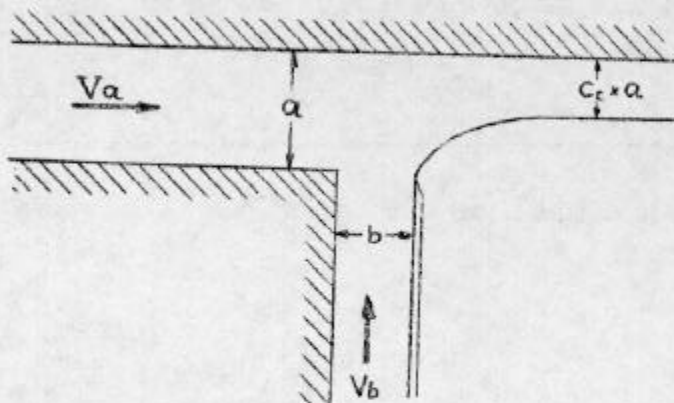


El Coeficiente de contracción (C_c), que en este caso sería función solamente de la razón a/b llamada (R), estaría implícito en la relación :

$$\tan \left[\pi \frac{(1 - C_c) \times R}{R - C_c^2} \right] = \frac{2 R C_c}{R - C_c^2}$$

Una comprobación sencilla de la exactitud de esta fórmula se logra haciendo $a/b = 1$, donde se obtiene $C_c = 1$ como es de esperar y para $a/b = \infty$ se obtiene un $C_c = \pi / \pi + 1$, lo que concuerda con los casos conocidos.

CASO 2 :



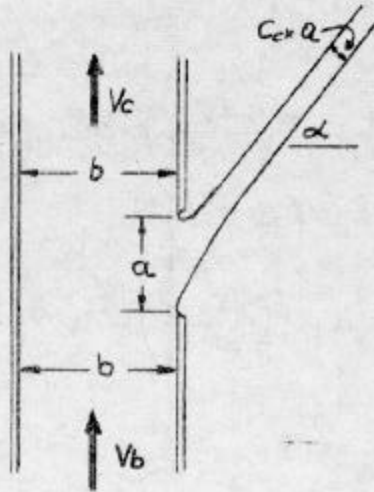
El Coeficiente de contracción C_c que en este caso es sólo función de :
(V_b/V_a) y
(b/a).

$$\frac{1}{2} \times \left[\frac{(V_a \times a + V_b \times b)^2 - (V_b \times a \times C_c)^2}{V_a \times a \times C_c (V_a \times a + V_b \times b)} \right] = \tan \left\{ \left(C_c - \frac{1}{2} \right) \bar{\pi} \left[\frac{(V_a \times a + V_b \times b)^2}{(V_a \times a + V_b \times b)^2 - (V_b \times a \times C_c)^2} \right] \right.$$

$$\left. - \frac{\bar{\pi}}{2} \left[\frac{(V_a \times a \times C_c)^2}{(V_a \times a + V_b \times b)^2 - (V_b \times a \times C_c)^2} \right] \right.$$

$$\left. + \frac{b}{a} \left[\frac{(V_a \times a + V_b \times b)^2 + (V_b \times a \times C_c)^2}{(V_a \times a + V_b \times b)^2 - (V_b \times a \times C_c)^2} \right] \ln \left[\frac{V_a \times a + V_b \times b + V_b \times a \times C_c}{V_a \times a + V_b \times b - V_b \times a \times C_c} \right] \right\}$$

CASO 3 :



Las variables que definirán el ángulo de deflexión α y el coeficiente de contracción C_c son

$$C_p = \frac{P_B - P_E}{\frac{1}{2} \rho V_B^2}$$

Coficiente de presión que relaciona la presión interior P_B y la exterior P_E .

(a/b) o razón geométrica A_R ,
 (V_B/V_C) o razón de veloc. V_R .

El Coeficiente de Contracción es :

$$C_c = |\cos \alpha| - |M| - |N| \quad \text{donde :}$$

$$M = -\frac{b}{a} \frac{1}{iL} \frac{1}{\sqrt{C_p+1}} [\sqrt{1-c^2} F(g) + c G(g)] \\ + \frac{b}{a} \frac{1}{iL} \frac{1}{\sqrt{R}\sqrt{C_p+1}} [\sqrt{1-c^2} F(f) + c G(f)] \\ + \frac{b}{a} \frac{1}{iL} C_c A_R [\sqrt{1-c^2} F(c) + c G(c)]$$

$$N = -\frac{b}{a} \frac{1}{iL} \frac{1}{\sqrt{C_p+1}} [\sqrt{1-c^2} H(g) + c I(g)] \\ + \frac{b}{a} \frac{1}{iL} \frac{1}{\sqrt{R}\sqrt{C_p+1}} [\sqrt{1-c^2} H(f) + c I(f)] \\ + \frac{b}{a} \frac{1}{iL} C_c A_R [\sqrt{1-c^2} H(c) + c I(c)]$$

Siendo :

$$F(x) = c + 1 + x \ln \left(\frac{x-1}{x+c} \right)$$

$$G(x) = \sqrt{1-c^2} + x \left(\sin^{-1} c + \frac{iL}{2} \right) - \sqrt{x^2-1} \left\{ \sin^{-1} \left(\frac{2+xc}{x+c} \right) - \sin^{-1} \left(\frac{2-x}{x-1} \right) \right\}$$

$$H(x) = c - 1 + x \ln \left(\frac{x+1}{x+c} \right)$$

$$I(x) = \sqrt{1-c^2} + x \left(\sin^{-1} c - \frac{iL}{2} \right) - \sqrt{x^2-1} \left\{ \sin^{-1} \left(\frac{2+xc}{x+c} \right) - \sin^{-1} \left(\frac{2+x}{x+1} \right) \right\}$$

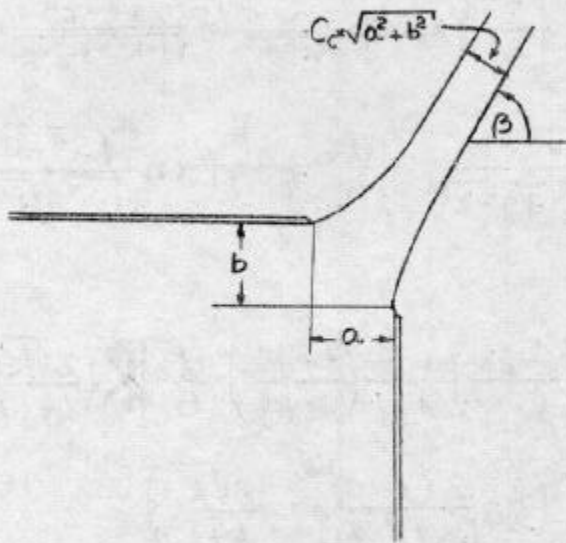
Donde c, f, y g estarían dados por :

$$c = \frac{\sqrt{R} + 1}{2 C_c A_R \sqrt{R} (C_p + 1)} \quad f = \frac{C_p + 2}{2 \sqrt{C_p + 1}} \quad g = \frac{\sqrt{R}^2 (C_p + 1) + 1}{2 \sqrt{R} \sqrt{C_p + 1}}$$

y el ángulo de deflexión α estaría dado en :

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{R} + 1}{2 C_c A_R \sqrt{R} (C_p + 1)}$$

CASO 4 :



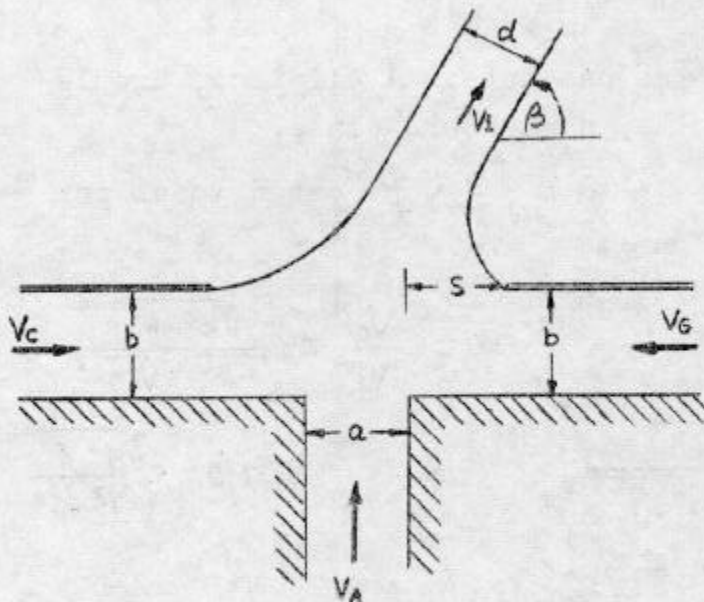
El Coeficiente de contracción C_c sería función de la razón (b/a) , lo mismo el ángulo de deflexión β .

$$C_c = \cos \beta \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \times \left[\sin \beta + \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \beta \cdot \cot h^{-1} \frac{1}{\cos \beta} - \cos^2 \beta \cot h^{-1} \frac{1}{\sin \beta} \right] \right\}^{-1}$$

donde $\gamma = \beta + \delta$ y $\tan \delta = -\frac{b}{a}$ y

$$\frac{b}{a} = \frac{1 - \cos \beta \times \cot h^{-1} \left(\frac{1}{\cos \beta} \right)}{1 - \cos \beta \times \cot h^{-1} \left(\frac{1}{\sin \beta} \right)}$$

CASO 5 :



Tanto el Coeficiente de contracción C_c como el ángulo de deflexión β son función de las razones geométricas (a/b) y (S/b) y de las razones de velocidad (V_c/V_A) y (V_g/V_A) . C_c y β se obtendrán de la solución simultánea

de las siguientes ecuaciones :

$$\frac{a+2s}{b} = \frac{d}{b} \operatorname{sen} \beta + 2 \frac{\sqrt{1-k^2}}{\pi} \left[\frac{\eta}{k} \frac{a}{b} \operatorname{sen}^{-1} k - \frac{\alpha}{\sqrt{c^2-k^2}} \ln \frac{\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{1-k^2} + \sqrt{c^2-k^2}} \right]$$

$$- \frac{\gamma}{\sqrt{g^2-k^2}} \ln \frac{\sqrt{1-g^2}}{\sqrt{1-k^2} + \sqrt{g^2-k^2}} + \frac{d}{b} \frac{1}{\sqrt{f^2-k^2}} \ln \frac{\sqrt{f^2-1}}{\sqrt{1-k^2} + \sqrt{f^2-k^2}}$$

$$0 = \frac{2}{\pi(1+k)} \left\{ \left[\left(\frac{1+ck}{k+c} \right) \alpha + \left(\frac{1-gk}{k-g} \right) \gamma - \left(\frac{1+fk}{k+f} \right) \frac{d}{b} \right] K\left(\frac{2\sqrt{k}}{k+1}\right) \right.$$

$$+ \frac{d(1-k)(c-1)}{(k+c)} \times \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2(k+c)}{(k+1)(c+1)}, \frac{2\sqrt{k}}{k+1}\right)$$

$$+ \frac{\gamma(1-k)(1+g)}{(g-k)} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2(k-g)}{(k+1)(1-g)}, \frac{2\sqrt{k}}{k+1}\right)$$

$$\left. - \frac{d}{b} \frac{(1-k)(f-1)}{k+f} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2(k+f)}{(k+1)(f+1)}, \frac{2\sqrt{k}}{k+1}\right) \right\}$$

donde : $K(h)$ es una integral elíptica, completa, de primera clase, y

$\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \alpha^2, h\right)$ es una integral elíptica, completa, de tercera clase,

y donde $\eta, \gamma, \alpha, c, k, g$ y f están dadas por

$$\eta = \frac{V_A}{V_j} = \frac{k}{1 + \sqrt{1-k^2}}$$

$$\alpha = \frac{V_c}{V_j} = \frac{\sqrt{c^2-k^2}}{\sqrt{1-k^2} + \sqrt{1-c^2}}$$

$$\gamma = \frac{V_g}{V_j} = \frac{\sqrt{g^2-k^2}}{\sqrt{1-k^2} + \sqrt{1-g^2}}$$

$$\text{y } \operatorname{sen} \beta = \sqrt{\frac{f^2-1}{f^2-k^2}}$$

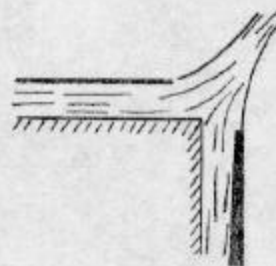
IV.- DISCUSION DE LOS RESULTADOS :

1.- Las soluciones expuestas, aunque de apariencia complicada, pueden ser resueltas fácilmente mediante el uso del computador. Aunque queda pendiente, para los cuatro primeros casos, la comparación de los resultados teóricos con valores experimentales, las siguientes acotaciones hacen presumir una exactitud apreciable:

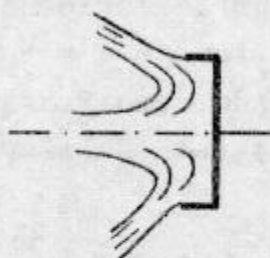
- a.- Al llevar las condiciones geométricas de cada caso a extremos tales cuya solución sea conocida, la concordancia es perfecta.
- b.- Otros problemas, no mencionados aquí, pero resueltos por otros investigadores mediante el uso de esta teoría, al ser comparados con valores experimentales dan excelentes resultados. Tales es el caso en otros, de los siguientes :



VALVULA DE MARIPOSA
(T. Sarpkaya)



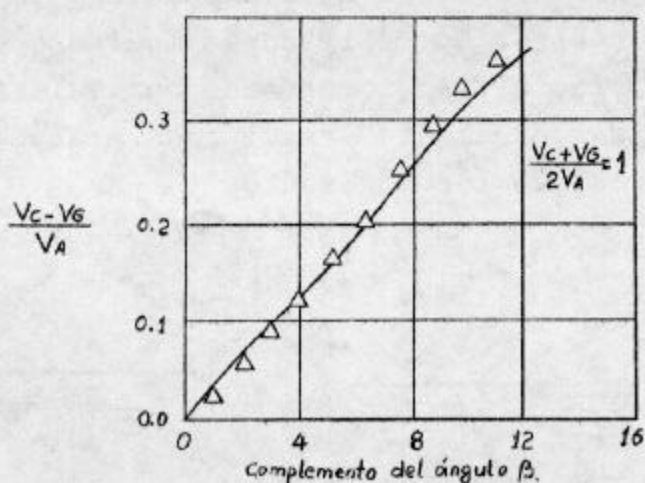
AMPLIFICADOR FLUIDICO
PROPORCIONAL
(N. Gungor)



IMPACTO DE UN CHORRO
CON OBSTACULO EN U
(T. Sarpkaya)

2.- En el análisis del Caso 5.- se comete un error de mayor magnitud al despreciar la viscosidad del fluido dado que son tres los chorros que interactúan perpendicularmente entre ellos.

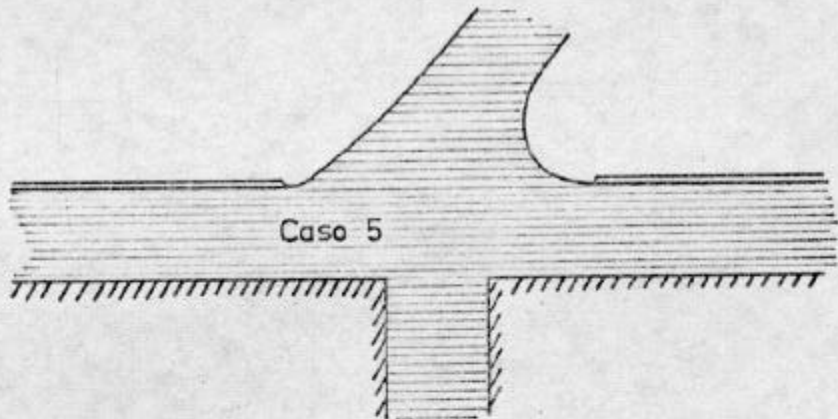
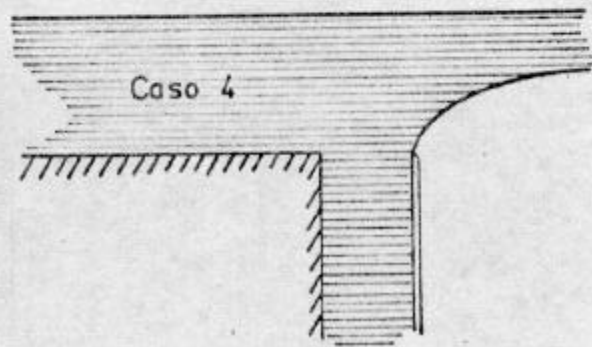
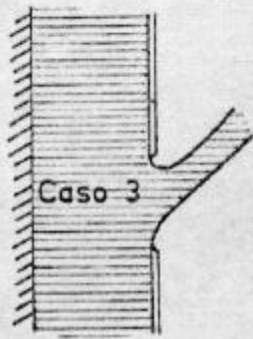
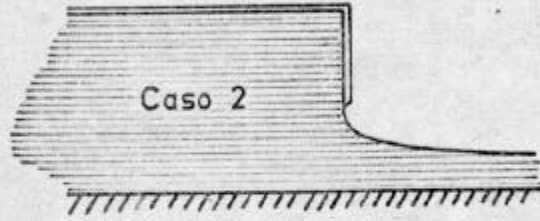
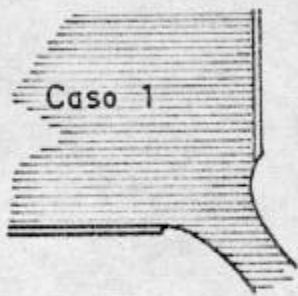
Pero si se determina la velocidad resultante del chorro en forma experimental y se usa la máxima como velocidad promedio, esta discrepancia desaparece obteniéndose una concordancia excelente como se muestra en la siguiente curva :



NOTA : Los tres primeros casos expuestos fueron preparados en conjunto por el Autor con los Tenientes de la Armada Norteamericana Sres. BALLBACK, WESTBROCK y BOSS. Los casos 4 y 5 fueron resueltos por el Autor, teniendo como Profesor Guía al Dr. T. SARPKEYA, en Monterey, California - Noviembre 1969.

CINCO CASOS DE VERTEDEROS

Analisis del Coeficiente de Contracción y Angulo de Deflexión mediante uso de Teoría de "Linea de Corriente Libre"



G. HIRIART . L
1971