

(Informe Interno del Laboratorio)

SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA HIDRAULICA
I COLOQUIO NACIONAL
JUNIO - JULIO 1971
SANTIAGO - CHILE

ESTUDIO DEL FLUJO BIDIMENSIONAL SOBRE UN VERTEDERO DE
CRESTA REDONDEADA, A TRAVES DE LA INTEGRACION NUMERICA
DE LA ECUACION DE LAPLACE

por Ramón Fuentes A. (')

Enrique Acuña A. (")

I.- INTRODUCCION :

El estudio de un escurrimiento plano con contornos fijos (caso de las singularidades en presión) o bien el de uno con una superficie libre tal que todas las velocidades en esta superficie sean aproximadamente iguales (caso del flujo al pié de evacuadores de crecidas) puede realizarse en forma relativamente simple. Pero si tomamos el caso de vertederos compuertas o gradas, el asunto se complica enormemente, ya que, en primer lugar, la superficie libre es una incógnita auxiliar que los escurrimientos en presión no tienen y las velocidades en esta superficie ya no pueden considerarse como iguales entre sí.

Debido al interés práctico del problema (de ser resuelto, él permitiría calcular velocidades y presiones en una napa que vierte sobre un contorno arbitrario), es que nuestro Laboratorio ha emprendido su estudio.

II.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA :

Sea (Figura No. 1) un vertedero de cresta redondeada, cuyo contorno es una curva C conocida y sea S la superficie libre. Los ejes coor-

(') Ingeniero Jefe, Laboratorio de Hidráulica, Universidad de Chile.

(") Ingeniero Investigador, Laboratorio de Hidráulica, Universidad de Chile.

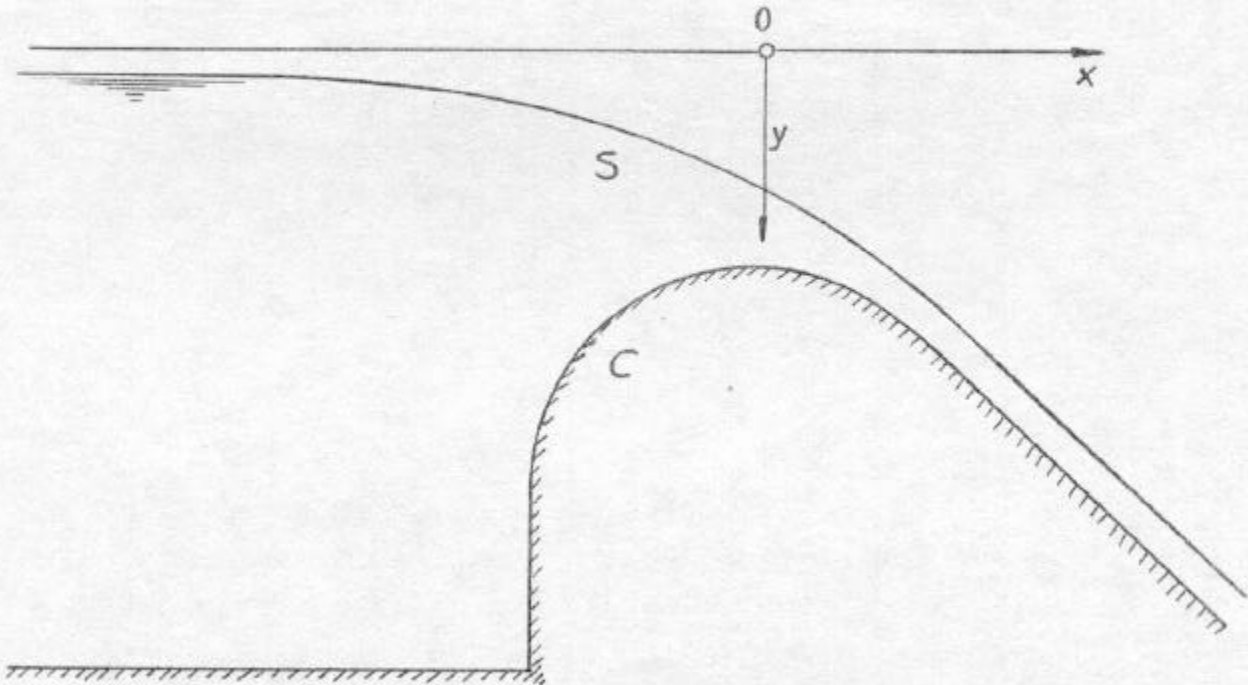


FIGURA N° 1

denados se han elegido de modo que el plano oxz coincida con el plano de carga y el eje oy pasa por la cresta.

Se desea conocer la presión y la velocidad en todo punto del flujo.

Si suponemos que el fluido es incompresible y perfecto y el flujo irrotacional, esto puede obtenerse solucionando la ecuación de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \dots (1)$$

en donde ψ es la función corriente de Stokes ('), (1) y sometiendo la solución encontrada a las siguientes condiciones de borde :

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 \quad \text{sobre } C \\ &\dots (2) \\ \psi &= \psi_1 \quad \text{sobre } S \end{aligned}$$

Además, ya que $\psi = \psi_1$, o sea, en S la presión debe ser nula, deberá tenerse allí :

$$u^2 = u_x^2 + u_y^2 = 2gy \dots (3)$$

Todo ésto es relativamente simple si S es un dato, pero precisamente en el problema que nos hemos planteado, no lo es.

III.- MÉTODOS DE SOLUCION :

Hemos revisado (y será expuesto en una publicación detallada, ya en preparación), los diferentes métodos susceptibles de ser adoptados para estudiar nuestro caso.

Los más importantes son :

- A) El método semi-experimental de ESCANDE (2)
- B) El método de la superficie S supuesta (SOUTHWELL y VAISEY (3)).

(') Las componentes u_x y u_y de la velocidad u están dadas por :

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad ; \quad u_y = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

C) El método de las ecuaciones integrales (STRELKOFF (4)).

El método A consiste en medir la superficie S sobre una maqueta y luego encontrar ψ mediante un método gráfico (construcción de PRASIL (5)).

El método B supone un cierto contorno arbitrario S y luego de calculado ψ , se verifica la condición de superficie libre (3), consiguiéndose S en consecuencia y recomenzando el proceso.

El método de las ecuaciones integrales, teóricamente al menos el más potente, permite expresar directamente la función ψ a través de ecuaciones integro-diferenciales que se resuelven al computador.

Nosotros nos hemos decidido en una primera etapa, a emplear una modificación del método A, consistente en medir la superficie libre sobre un modelo reducido y después calcular los valores de ψ al computador.

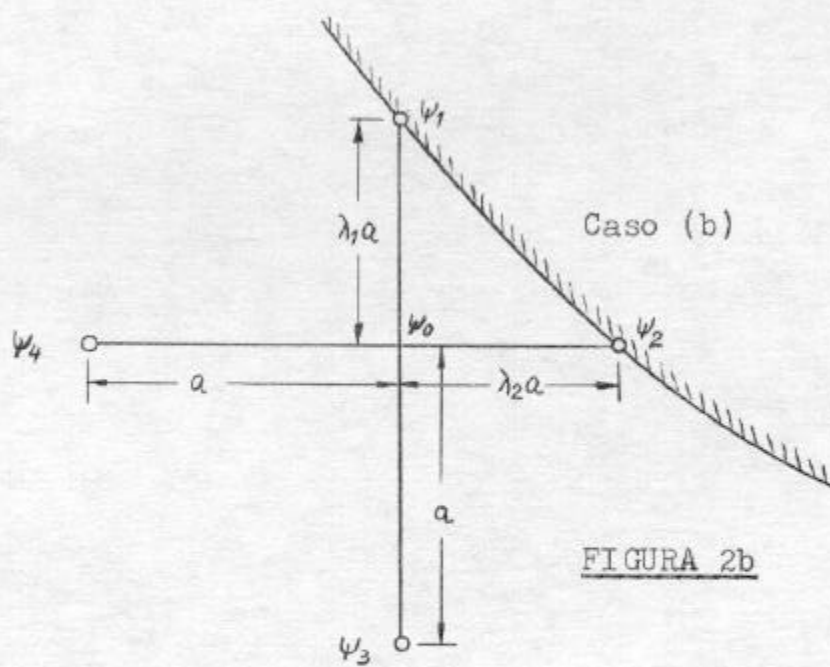
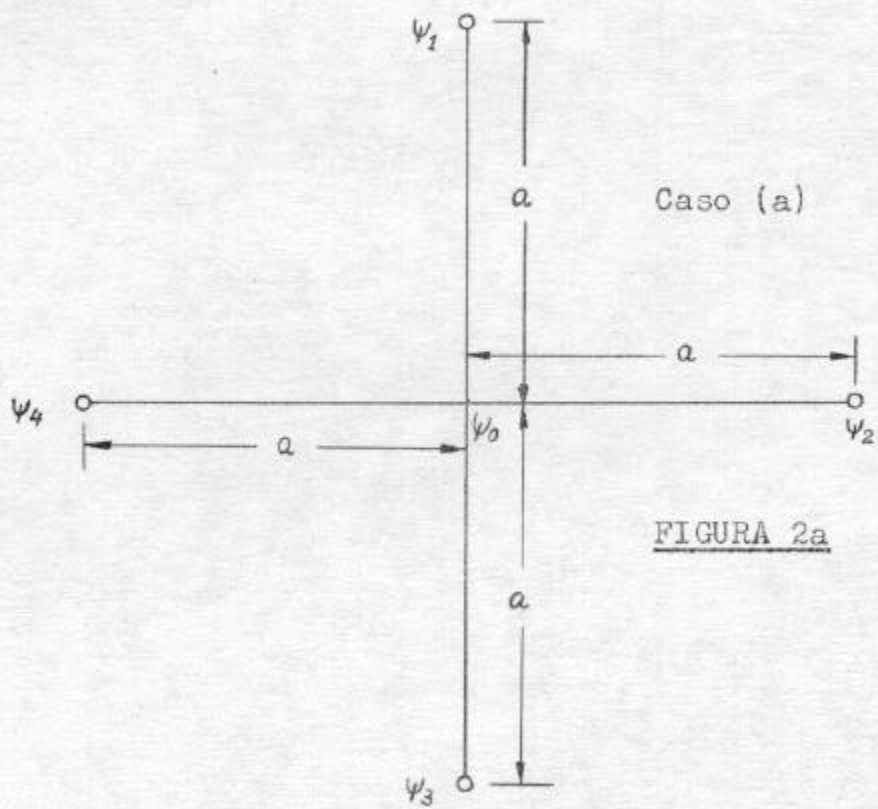
En una segunda etapa, emplearemos el método de la superficie supuesta.

IV.- CALCULO NUMERICO :

El ha sido realizado pasando la ecuación de Laplace a incrementos finitos, de la manera que lo hicieron ya MC NOWN y HSU (6); el método conduce a las siguientes fórmulas :

$$\psi_0 = \frac{\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4}{4} \quad \begin{array}{l} \text{en el caso (a)} \\ \text{(Figura 2a)} \end{array}$$

$$\psi_0 = \frac{\frac{\psi_1}{\lambda_1} + \frac{\psi_2}{\lambda_2} + \psi_3 + \psi_4}{2 + \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}} \quad \begin{array}{l} \text{en el caso (b)} \\ \text{(Figura 2b)} \end{array}$$



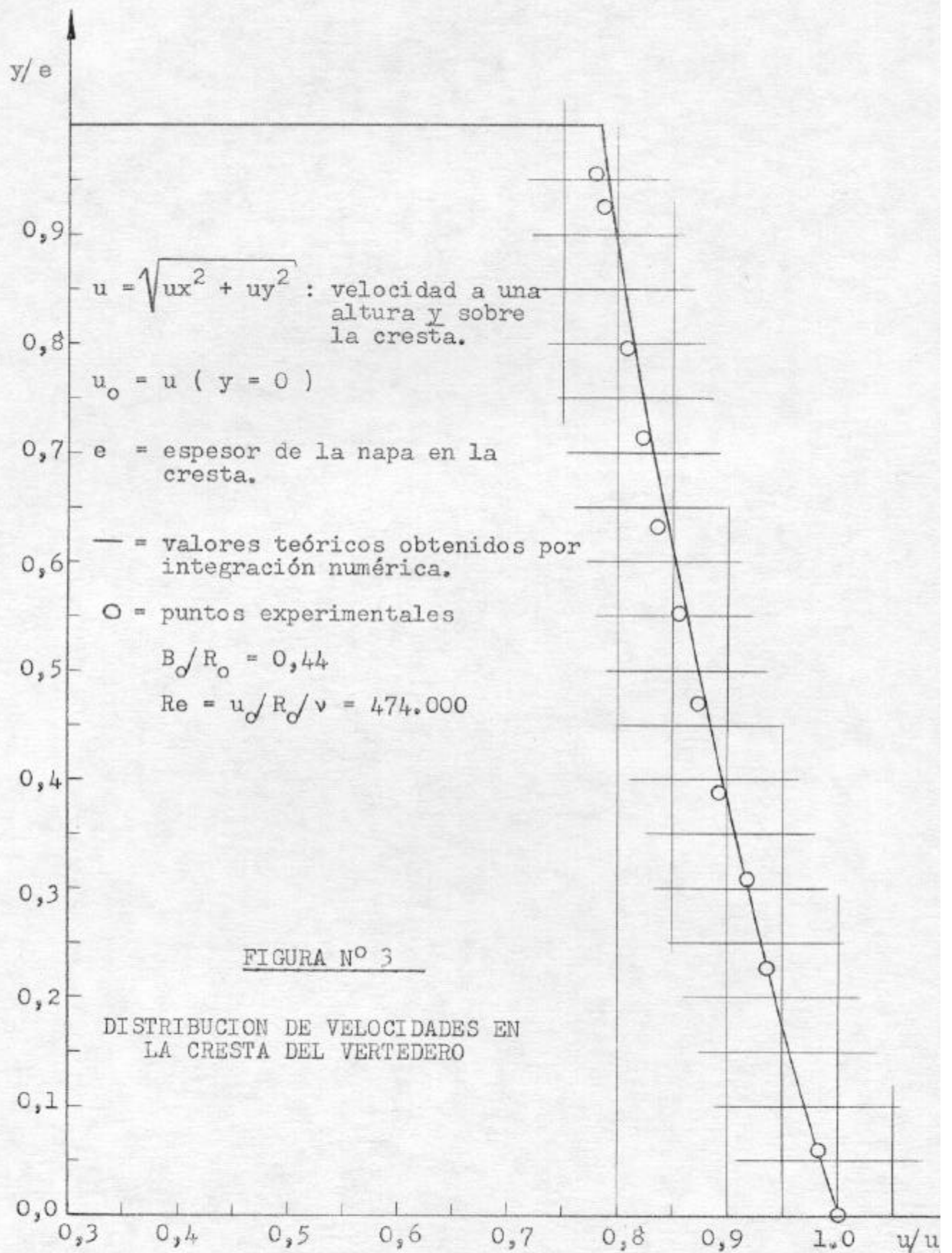
RESULTADOS :

Ellos pueden observarse en las Figuras Nos. 4 y 5, las que muestran que el método predice en buena forma las experiencias realizadas.

Esperamos que, una vez puesto a punto el método de la superficie supuesta, éste nos permita predecir, además de las velocidades y presiones, la superficie libre S.

REFERENCIAS

1. L.M. Milne-Thomson, " Theoretical Hydrodynamics " Ed. Mac Millan, 1968.
2. L. Escande, " Notice sur les travaux scientifiques " Ed. Edouard Privat, Toulouse, France, 1953.
3. R. Southwell y G. Vaisey, " Fluid motions characterized by tree streamlines ". Philosophical Transactions Royal Soc. of London, series A240, 1948, p. 117.
4. T. Strelkoff, " Solution of highly curvilinear gravity flows ". Journal of the Engineering Mechanics Division. EM3, p. 195, Junio 1964.
5. F. Prasil, " Technische Hydrdynamik, Springer Verlag, Berlin, 1913.
6. Mc Nown, Hsu y Yih, " Applications of the Relaxation Technique in Fluid Flow Transactions, ASCE, 120, 1955. p. 650.



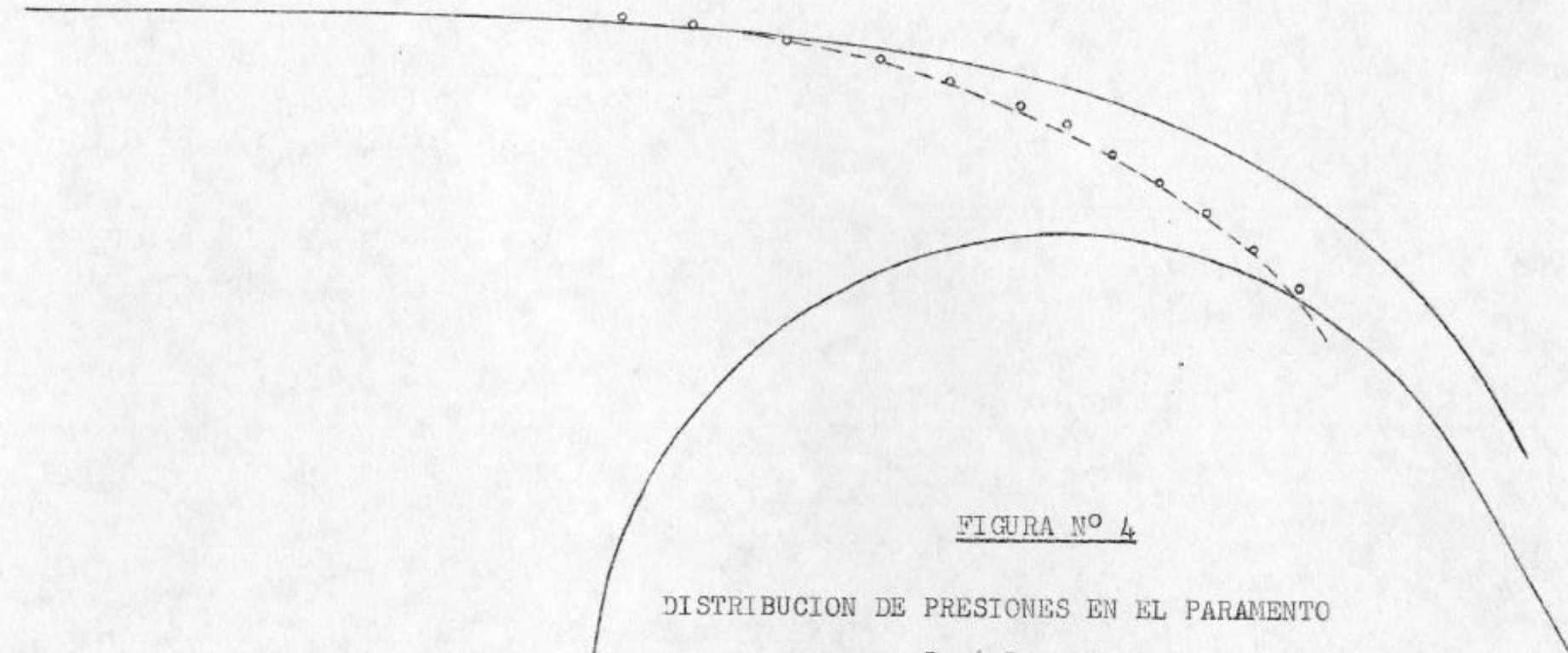


FIGURA N° 4

DISTRIBUCION DE PRESIONES EN EL PARAMENTO

$$B_o / R_o = 0,44$$

- = Valores teóricos obtenidos por integración numérica.
- o= Puntos experimentales.