SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERIA HIDRAULICA

I COLOQUIO NACIONAL

JUNIO - JULIO 1971

SANTIAGO - CHILE

CALCULO DE REDES DE AGUA POTABLE EN COMPUTADOR MEDIANTE LA APLICACION DEL METODO DE NEWTON - RAPHSON.

por : José Manuel Gundelach y
Juan Pablo Schifini (*)

La Sección Ingeniería Sanitaria del Departamento de Obras Civiles de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile desarrolla diversas líneas de investigación, entre las que se cuenta una cuyo objetivo es el de introducir y fomentar el uso de computadores electrónicos en algunos procesos de cálculo propios de la Ingeniería Sanitaria. Dentro de esta línea se ha elaborado un programa de computación en FORTRAN IV, Nivel E, para el cálculo de redes de distribución de agua potable mediante la aplicación del método de Newton-Raphson.

El procedimiento que emplea el programa mencionado consiste esencialmente en la formulación del sistema de ecuaciones no lineales que representan el modelo matemático del funcionamiento de una red de agua potable, y su resolución por medio del método de Newton-Raphson, que es un proceso mediante el cual se reemplaza el sistema de ecuaciones no lineales por otro de ecuaciones lineales que permiten la resolución del primero mediante un procedimiento iterativo.

Para plantear el sistema de ecuaciones no lineales se emplean las tres leyes para circuitos de Kirchoff, que aplicadas al caso de redes de agua potable son :

1. La suma algebraica de los caudales en cada nudo de la red es nula.
2. La suma algebraica de las pérdidas de carga en los tramos que forman un circuito cerrado es nula.
3. Existe una relación entre la pérdida de carga y el caudal en un tramo, que puede ser representada mediante una expresión matemática.

(*) Ingenieros Civiles, Investigadores de la Sección Ingeniería Sanitaria del Departamento de Obras Civiles de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile.

En este trabajo se utilizó la siguiente formulación matemática general de la primera ley de Kirchoff :

$$F_j = \sum_{i=1}^{NN} Q_{ji} + C_j = 0 \qquad j = 1,NN \qquad (1)$$

Donde NN es el número de nudos de la red, C_j el consumo (negativo) o aporte (positivo) en el nudo j y Q_{ji} es el caudal que circula por el elemento que conecta al nudo i con el nudo j ($Q_{ji} = 0$ para $i = j$, y cuando i y j no estén conectados).

A su vez, se puede expresar la tercera ley de Kirchoff en la forma :

$$Q_{ji} = Q_{ji}\ (H_i - H_j, R_{ji}) \qquad (2)$$

Vale decir, el caudal que circula por el elemento ij es función de la pérdida de carga en él y de sus propias características, involucradas en el término R_{ji}.

La expresión de la ecuación (2) dependerá del tipo de elemento (tramo) que una los nudos i y j. En este trabajo se consideró la posibilidad de la existencia de tres tipos de elementos :

1. Cañería. En este caso se emplea la fórmula de Hazen-Williams.
2. Válvula. Que tipifica a cualquier clase de pérdida de carga por fricción y es representada por la fórmula general de un coeficiente multiplicado por la altura de velocidad correspondiente.
3. Bomba. En este caso la ecuación (2) es reemplazada por la curva característica de la bomba que se emplee.

Introduciendo la ecuación (2) en la expresión (1) resulta :

$$F_j = \sum_{i=1}^{NN} Q_{ji}\ (H_i - H_j, R_{ji}) + C_j = 0 \qquad j = 1,NN \ (3)$$

Para una red de NN nudos se tienen NN ecuaciones de este tipo, una para cada nudo, que son el modelo matemático del funcionamiento de la red. De este modo se podrá obtener la solución de este sistema de ecuaciones si existen NN incógnitas.

El programa elaborado permite la existencia de tres tipos de incógnitas :

1. Consumo o aporte en un nudo.
2. Diámetro de una cañería.
3. Presión en un nudo (representada como la cota piezométrica -H- menos la cota de terreno del nudo).

Cabe hacer notar que, al considerar en la expresión de la ecuación (3) correspondiente a cada nudo, las cotas piezométricas (H), y no la pérdida de carga como tal, se está cumpliendo automáticamente la segunda ley de Kirchoff.

Por otra parte se observa que, al considerar diámetros o presiones como incógnitas, se tendrá un sistema de ecuaciones no lineales. La resolución de un sistema de este tipo en forma directa es prácticamente imposible, aún con el auxilio de un computador digital, por lo que se debió recurrir a un artificio matemático para solucionar el problema. El procedimiento elegido fue el método iterativo de Newton-Raphson, que encuentra un grupo de correcciones para las incógnitas en cada iteración.

Según Newton, si estamos buscando la raíz de una ecuación $f(x) = 0$, en que $f(x)$ está representada por la curva de la figura (1), y tomamos el valor x_o como primera aproximación de esa raíz, la abscisa x_1 de la intersección de la tangente a la curva en el punto $(x_o, f(x_o))$ con el eje de las x será una nueva y, normalmente, mejor aproximación al valor buscado.

Debido al significado geométrico de la derivada, se tiene :

$$f'(x_o) = -\frac{f(x_o)}{x_o - x_1}$$

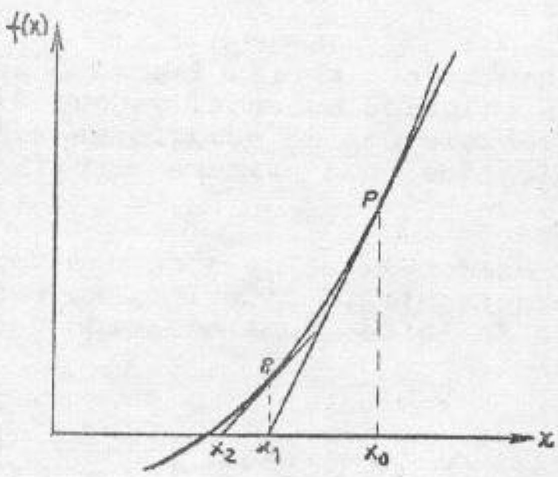


Figura N° 1

La variación de la variable x entre dos iteraciones sucesivas resulta :

$$\Delta x = x_o - x_1 = -\frac{f(x_o)}{f'(x_o)}$$

O bien :

$$f(x_o) + f'(x_o) \cdot \Delta x = 0 \qquad (4)$$

Este desarrollo fue extendido por Raphson a funciones que involucran más de una variable. Si :

$$f_1(x,y) = 0 \text{ , y}$$

$$f_2(x,y) = 0$$

son dos ecuaciones, siendo x_1 e y_1 primeras aproximaciones a las raíces, las correciones Δx y Δy para obtener un nuevo par de valores (x_2, y_2) para las incógnitas están dadas por :

$$f_1(x_1, y_1) + \frac{\partial f_1(x_1,y_1)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f_1(x_1,y_1)}{\partial y} \cdot \Delta y = 0$$

$$f_2(x_1, y_1) + \frac{\partial f_2(x_1,y_1)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f_2(x_1,y_1)}{\partial y} \cdot \Delta y = 0$$

Teniendo entonces :

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$
$$y_2 = y_1 + \Delta y$$

Este mismo proceso puede hacerse extensivo a sistemas de ecuaciones que involucren cualquier número de incógnitas.

El procedimiento recién descrito no siempre convergerá hacia la solución buscada, ya que ello dependerá de la naturaleza de sistema de ecuaciones y, sobre todo, de los valores elegidos como primera aproximación.

Para proceder al cálculo de una red de agua potable según el planteamiento anterior, se puede plantear, para cada nudo de la red, una ecuación del tipo :

$$F_j + \sum_{\bar{H}_i} \frac{\partial F_j}{\partial \bar{H}_i} \cdot \Delta\bar{H}_i + \sum_{\bar{D}_{ji}} \frac{\partial F_j}{\partial \bar{D}_{ji}} \cdot \Delta\bar{D}_{ji} + \sum_{\bar{C}_i} \frac{\partial F_j}{\partial \bar{C}_i} \cdot \Delta\bar{C}_i = 0 \quad (5)$$
$$j = 1, NN$$

Donde $\bar{H}$, $\bar{D}$ y $\bar{C}$ indican las cotas piezométricas, diámetros y consumos (o aportes) que son incógnitas.

Procedimiento de Cálculo.

La manera de proceder para obtener el cálculo de una red de agua potable con el método expuesto es la siguiente :

a) En primer lugar se deben elegir las NN incógnitas, dentro de los tres tipos posibles, cuya determinación se busca. Todos los demás factores que intervengan deben ser conocidos, valga decir : longitudes de cañerías, coeficientes de válvulas, cotas de terreno de los nudos, coeficientes de las cañerías y los aportes o consumos en los nudos, cotas piezométricas en los nudos y diámetros de cañerías que no sean incógnitas.

Las incógnitas deben ser elegidas de modo que en la ecuacióđ de cada nudo de la red intervenga al menos una incógnita. Si esto no fuera así y existiera algún nudo que tuviera su ecuación de equilibrio de caudales totalmente determinada, el problema estaría indeterminado.

b) Se asignan valores a las incógnitas que, a juicio del proyectista, se aproximen a valores que sean raíces del sistema.

c) Se calcula, con los valores de las incógnitas,la función (F_j) para cada nudo y se comprueba que ninguna de dichas funciones sobrepase el error aceptable. Si esto ocurre se habrá logrado solucionar la red, si no es así habrá que hacer una nueva iteración según los pasos siguientes (en la primera iteración será muy improbable que se logre la solución en forma directa).

d) Se plantea el sistema de ecuaciones lineales de la ecuación (5), para los valores que que en ese momento tengan las incógnitas.

e) Se soluciona el sistema de ecuaciones (5) obteniéndose los valores ΔI, variaciones de las incógnitas.

f) Se obtienen los nuevos valores I' de las incógnitas: $I'=I+\Delta I$. En seguida se vuelve al punto c).

<u>Programa de Computación.</u>

Siguiendo el método explicado, se elaboró un programa de computación que permite su aplicación en forma sencilla, rápida y segura.

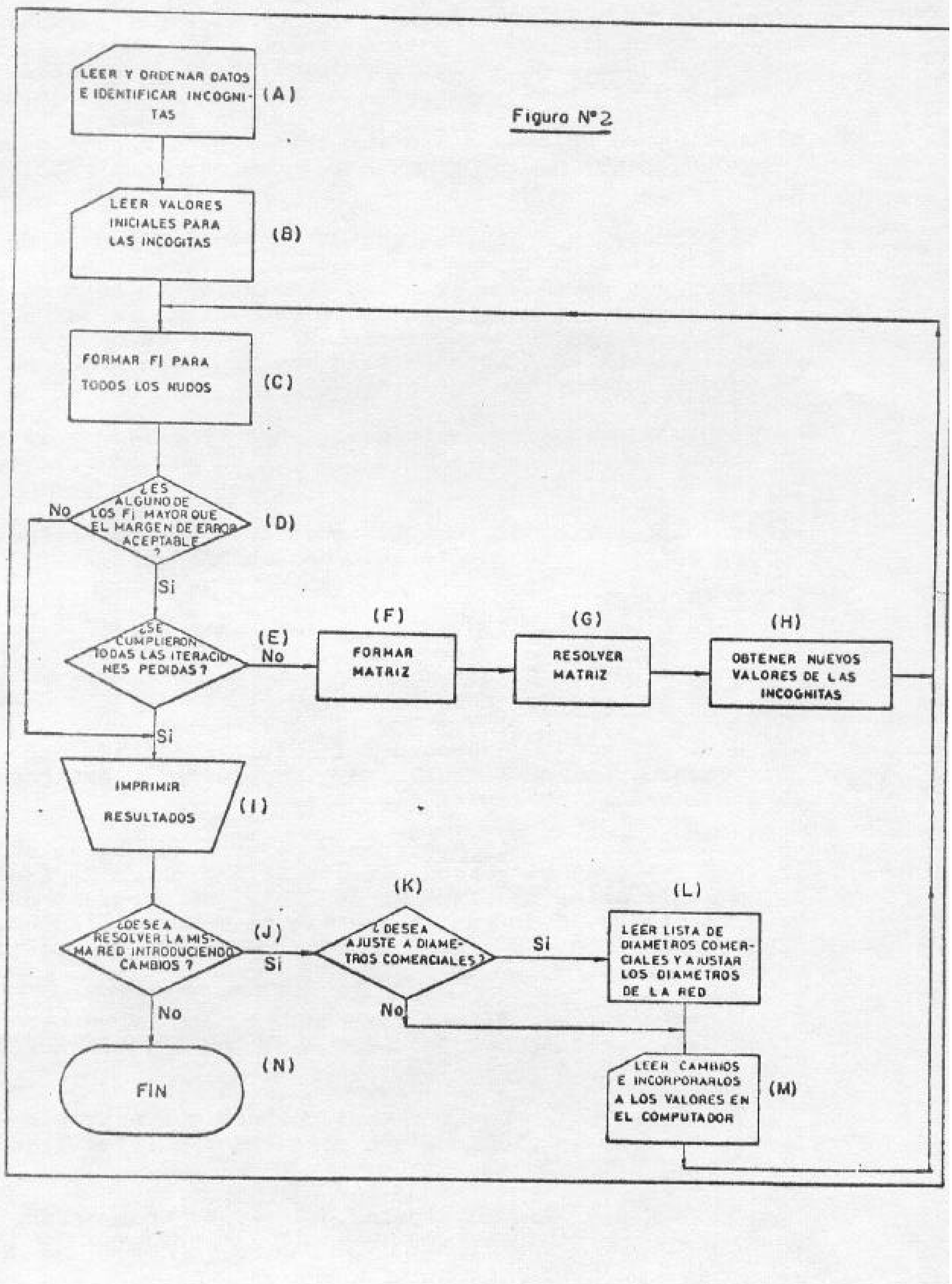
La operatoria general que sigue el programa es, a grandes rasgos, la que se indica en la figura 2, en que aparece un diagrama de flujo del programa en forma esquemática. Cada cuadro que figura en este diagrama de flujo representa una serie de operaciones que se realizan en el programa.

El programa cuenta con : un programa principal, cuatro subrutinas (BOMBAS, CAMBIO, DIAME Y SOLEQ) y dos funciones (MATCH y LISTA).

Los diversos cuadros que aparecen en el diagrama de la figura 2 son ejecutados por las siguientes partes del programa.

Cuadros A y B	: Programa principal y funciones MATCH Y LISTA.
Cuadro C	: Programa principal y subrutina BOMBAS.
Cuadros D y E	: Programa principal.
Cuadro F	: Programa principal y subrutina BOMBAS.

Figura N°2


LEER Y ORDENAR DATOS E IDENTIFICAR INCOGNITAS
(A)
LEER VALORES INICIALES PARA LAS INCOGITAS
(B)
FORMAR Fi PARA TODOS LOS NUDOS
(C)
¿ES ALGUNO DE LOS Fi MAYOR QUE EL MARGEN DE ERROR ACEPTABLE ?
(D)
No
Si
¿SE CUMPLIERON TODAS LAS ITERACIONES PEDIDAS?
(E)
No
Si
(F)
FORMAR MATRIZ
(G)
RESOLVER MATRIZ
(H)
OBTENER NUEVOS VALORES DE LAS INCOGNITAS
IMPRIMIR RESULTADOS
(I)
¿DESEA RESOLVER LA MISMA RED INTRODUCIENDO CAMBIOS ?
(J)
Si
No
(K)
¿DESEA AJUSTE A DIAMETROS COMERCIALES ?
Si
No
(L)
LEER LISTA DE DIAMETROS COMERCIALES Y AJUSTAR LOS DIAMETROS DE LA RED
LEER CAMBIOS E INCORPORARLOS A LOS VALORES EN EL COMPUTADOR
(M)
FIN
(N)

Cuadro G	: Programa principal y subrutina SOLEQ
Cuadro H	: Programa principal.
Cuadros I y J	: Programa principal.
Cuadro K	: Subrutina CAMBIO.
Cuadro L	: Subrutina DIAME y Funciones MATCH y LISTA.
Cuadro M	: Subrutina CAMBIO y Funciones MATCH y LISTA.
Cuadro N	: Programa principal.

Conclusiones.

Como conclusión del trabajo se pueden señalar algunas ventajas y desventajas que la aplicación del método Newton-Raphson al cálculo de redes de agua potable y el programa elaborado para su implementación presentan frente a otros métodos que sirven para el mismo objeto. Debe hacerse notar que, tanto las ventajas como las desventajas son inherentes, algunas al método en sí y otras al programa de computación.

En primer lugar cabe señalar la versatilidad del método en cuanto al tipo de incógnitas que permite considerar (presiones, consumos, diámetros), lo que lo ubica en una posición ventajosa frente a otros métodos. El mismo hecho de poder tener como incógnitas consumos o aportes en nudos hace posible el considerar estanques en la red, ya sea estanques a los pies o de regulación, y estudiar su comportamiento.

Por otra parte, el programa elaborado permite considerar elementos que normalmente no se toman en cuenta en los métodos corrientes de cálculo, como son válvulas y bombas. Esto da la posibilidad de obtener una mejor aproximación al comportamiento real de las redes.

La generalidad del método permite su utilización tanto en diseño como verificación de funcionamiento de redes, ya sean ellas nuevas, en operación o ampliaciones de redes existentes.

Sin embargo, el método no sólo presenta ventajas y es justo hacer notar también sus puntos en contra.

Es así que se puede señalar que no dimensiona con criterio económico, lo que es un inconveniente de importancia.

La solución a cualquier problema es única y, si los datos no se eligen en forma adecuada, ésta puede incluso ser absurda en el sentido físico.

Otro inconveniente del método es la posibilidad de no arribar a la solución, es decir de no convergencia. El que ésto suceda o no, dependerá casi exclusivamente de los valores iniciales que se elijan para las incógnitas.

Ahora bien, en cuanto a las ventajas y desventajas del programa mismo de computación, algunas de ellas son inherentes al programa y otras son propias del computador.

La principal característica de un computador es la rapidez y seguridad en los cálculos. Un computador adecuadamente programado presenta una posibilidad de error prácticamente nula y las operaciones matemáticas son realizadas a una velocidad asombrosa.

Por otra parte un computador presenta limitaciones de espacio, por lo que cualquier problema que en él se trate debe tener un tamaño tal que no rebalse la capacidad de memoria del mismo. En este aspecto, el programa presenta las siguientes limitaciones de tamaño de la red que es capaz de resolver, como valores máximos : 120 nudos; 120 tramos, de los cuales no más de 10 pueden ser bombas ni más de 30 pueden ser válvulas; un nudo no puede estar unido a más de 6 nudos; la curva característica de una bomba no puede estar determinada por menos de 3 ni más de 20 puntos y no se pueden proporcionar más de 20 diámetros comerciales.

Una ventaja considerable que presenta el programa elaborado corresponde a la opción CAMBIO, la que permite, con una sola pasada del programa, resolver la misma red con diferentes condiciones de trabajo.

Finalmente, como en todo programa de computación, es de suma importancia el que los datos sean proporcionados al computador de una manera específica y sin errores . Cualquier defecto, por nimio que sea, en este sentido produce la detención o una falla en la aplicación del programa. Es así que, si bien este programa se ha elaborado de modo que la entrega de datos resulte lo más sencilla posible, para lo cual se ha confeccionado un lenguaje especial, lo recién dicho no debe dejar de tenerse en cuenta.

R E F E R E N C I A

-"Aplicación del Método de Newton-Raphson al Cálculo de Redes de Distribución de Agua Potable". Sección Ingeniería Sanitaria, Serie Publicaciones , N°4, 1971. Basado en la tesis de grado, del mismo título, de José Manuel Gundelach.