



Revista de la Sociedad Chilena de Ingeniería Hidráulica



ISSN 0716-3746 Volumen 39, Número 2, 2024

REVISTA DE LA
SOCIEDAD CHILENA DE
INGENIERÍA HIDRÁULICA

SOCHID

Sede Instituto de Ingenieros de Chile – San Martín 352 – Fono 2 2698 4028 – Santiago CHILE

DIRECTORIO SOCHID

Presidente:	Jorge Gironás L.
Vicepresidenta:	Pamela Muñoz
Tesorero:	Damaris Orphanópoulos S.
Directores:	Hernán Alcayaga S. Aldo Tamburrino T. Scarlett Vásquez P.
Secretario General:	Vicente Zuazo E.

DIRECTORES HONORARIOS

Francisco J. Domínguez S. (Q.E.P.D.)
Horacio Mery M.
Eduardo Varas C.
Sergio Radrigán V.
Humberto Peña T.
Ernesto Brown F. (Q.E.P.D.)
Bonifacio Fernández L.
Jorge Bravo S
Luis Ayala R.
Ludwig Stowhas B.
Ricardo González V.
José Vargas B.
Luis Estellé A.
Raúl Demangel C.

EDITOR DE LA REVISTA

Aldo Tamburrino Tavantzis
atamburr@ing.uchile.cl
San Martín 352, Santiago
Fono 2 2698 4028
www.sochid.cl

Imagen de la portada: Diseño usado en el primer número de la Revista en 1986

REVISTA DE LA SOCIEDAD CHILENA DE INGENIERÍA HIDRÁULICA

ÍNDICE

Editorial	1
Invitación para contribuir con artículos en un número especial dedicado a flujos detríticos	3
Comentario: De los ríos de Chile Alejandro López Alvarado	5
Turbidity current generated by slow failure of a vertical subaqueous face due to breaching: Similarity solution and prospects for self-acceleration Gary Parker, Esther Eke, Enrica Viparelli	9
Process-based modeling of arsenic removal in subsurface flow constructed wetlands: Preliminary results for physical and chemical processes Diego Bravo-Riquelme, Katherine Lizama-Allende, Yarko Niño	23
Celeridad de formas de fondo generadas por el flujo laminar de un fluido tipo ley de potencia sobre un lecho no-cohesivo: Enfoque lineal Rodrigo González, Aldo Tamburrino	35
Errata	53
Hidro-Grafía Aldo Tamburrino Tavantzis	55

EDITORIAL

El pasado 4 de junio tuvo lugar la Asamblea Anual de Socios en la que dos Directores fueron elegidos, siendo ellos la ingeniera Scarlett Vásquez P. y reelecto el ingeniero Hernán Alcayaga S. Posteriormente, en reunión del 23 de julio se conformó el Directorio de la SOCHID para el periodo julio 2024-junio 2025, quedando Jorge Gironás L., Pamela Muñoz V. y Damaris Orphanópoulos S. en los cargos de Presidente, Vicepresidenta y Tesorera, respectivamente. Como Directores están Hernán Alcayaga S., Aldo Tamburrino T. y Scarlett Vásquez P. Adicionalmente, asumió en calidad de Secretario General el ingeniero Vicente Zuazo E., en reemplazo de Francisco Romero B., quien desempeñó el cargo por más de una década.

Dos tradicionales e importantes actividades están programadas para los próximos meses: las Jornadas Francisco Javier Domínguez, a desarrollarse en el Centro de Extensión de la PUC los días 22 y 23 de octubre y cuyo tema central es “De los datos a las decisiones: El poder de la información en la gestión integrada de cuencas y los recursos hídricos” (<https://jornadahidraulicafjd.cl/>) y el X Seminario Internacional de Ingeniería y Operación Portuaria (SIOP), que tendrá lugar entre el 6 y el 8 de noviembre en Antofagasta (<https://siop.uv.cl/>). En los sitios web antes indicados puede obtenerse más información de ambos eventos.

En marzo de 2025 se cumplen 10 años de los eventos aluvionales que ocurrieron en el norte de nuestro país. Es por esto que el primer número de la Revista del próximo año estará dedicado al tema de flujos detríticos o aluviones, en su sentido más amplio. Invitamos a colaborar con artículos, notas y comentarios, tanto desde el ámbito técnico e ingenieril como sociales o artísticas.

Como siempre, agradecemos la libre difusión de la Revista, cuyos números anteriores pueden descargarse del sitio web de la SOCHID, www.sochid.cl/publicaciones-sochid/revista-sochid/

Aldo Tamburrino Tavantzis
Editor

INVITACIÓN PARA CONTRIBUIR CON ARTÍCULOS EN UN NÚMERO ESPECIAL DEDICADO A FLUJOS DETRÍTICOS

El 25 de marzo de 2025 se cumplen 10 años del evento meteorológico que gatilló una gran cantidad de aluviones en el norte del país, entre las regiones de Coquimbo y Antofagasta. Por esta razón, la Revista desea conmemorar dicho evento con un número especial dedicado a flujos detríticos o aluviones, en su espectro más amplio, incluyendo condiciones de generación (climáticas, geológicas, geotécnicas), mecánica del flujo, modelación numérica y física, aspectos sociales, etc. De este modo, invitamos a todos los interesados en contribuir con artículos científicos, casos de la práctica profesional, columnas de opinión, y comentarios.

Considerando que el mes de febrero es de vacaciones de verano, las contribuciones deberán ser enviadas antes del 15 de enero de 2025. Consultas respecto al formato de los artículos, así como su envío deben hacerse al editor de la Revista a la dirección atamburr@uchile.cl.

COMENTARIO

DE LOS RÍOS DE CHILE

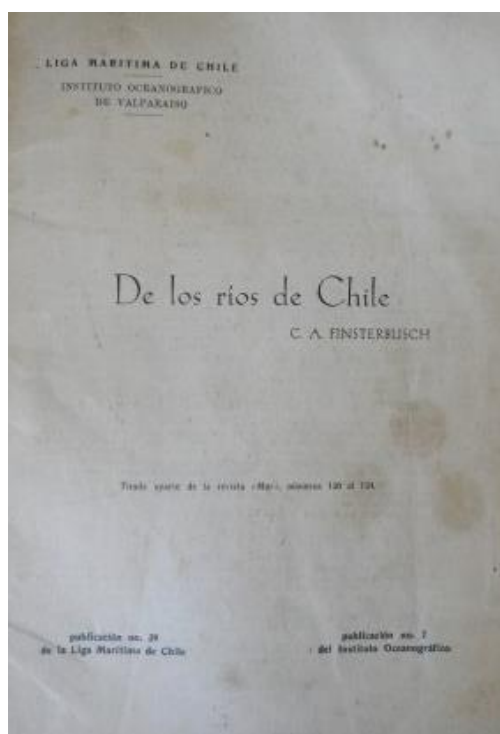
No hace mucho llegó a mis manos una antigua publicación de la Liga Marítima de Chile, identificada como la publicación N° 39 de esa institución y la publicación N° 7 del Instituto Oceanográfico de Valparaíso, que lleva por título “De los ríos de Chile” cuyo autor es Carlos A. Finsterbusch y fechada en mayo de 1947.

El autor desarrolla un interesante trabajo en el cual resume sus observaciones realizadas a lo largo de todos los sistemas fluviales que componen nuestro país.

En mi opinión es un trabajo que, con palabras simples y agudas observaciones y comentarios, pone de relieve los problemas que han afectado y siguen afectando a nuestras cuencas y cauces fluviales, por lo cual me ha parecido interesante comentar este trabajo, y destacar las palabras que su autor escribe en el prólogo “Hemos escrito este trabajo evitando en lo posible el lenguaje técnico y la necesidad del empleo de diccionarios específicos”, y estoy seguro de que consiguió su objetivo.

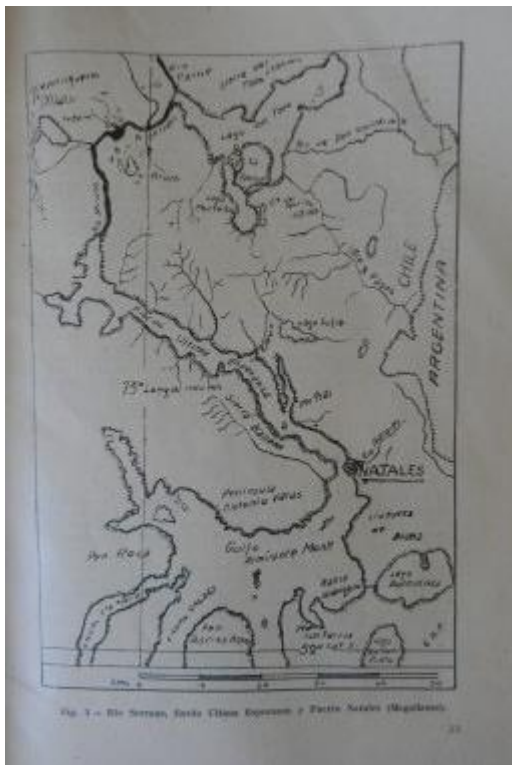
El autor inicia su recorrido de sur a norte, partiendo de los ríos que denomina fueguinos y terminando con los ríos nortinos a los que denomina con mayor propiedad quebradas. En total considera 26 sistemas para los cuales describe las características de los cauces considerando su geología, la cuenca, la hidrología, los efectos telúricos y, por cierto, la acción humana, poniendo de relieve el efecto de esta acción antrópica en el estado en que se encuentran los ríos.

Esta división hecha por el autor concuerda plenamente con las zonas hidrográficas definidas por Niemayer y Cereceda (1984, Tomo VII Hidrografía del libro Geografía de Chile editado por el Instituto Geográfico de Chile), quienes consideran siete zonas hidrográficas, de norte a sur: Norte árido, zona semi árida, zona subhúmeda, ríos tranquilos con regulación lacustre,



Portada de la publicación de C.A. Finsterbusch

ríos caudalosos en Patagonia septentrional, zona de los campos de hielo en Patagonia Meridional y territorios al sur del estrecho de Magallanes.



Uno de los mapas presentados en “De los ríos de Chile”, en el que se muestra los sistemas fluviales en la zona de Puerto Natales.

En su trabajo Carlos Finsterbusch hace gran hincapié en la acción humana que ha eliminado gran superficie de la cubierta vegetal en forma indiscriminada, lo que ha provocado erosión en las cuencas lo que se traduce en embancamiento de muchos cauces que en su tiempo fueron navegables destacando los ríos Cisnes, Palena, Yelcho, Maullín, Bueno, Valdivia, Bio-Bio y Maule, entre los más relevantes, pero destacando que en todos los sistemas principales el gran problema es la degradación de las cuencas con la consiguiente alteración de los ríos.

Un comentario interesante es lo que destaca en el sistema fluvial del río Valdivia, y que pone de manifiesto el efecto de los sismos en esa zona, para lo cual reproduce crónicas que relatan el terremoto ocurrido el 16 de diciembre de 1575 y que se presentó con similares características a las que se registraron en el terremoto del 22 de mayo de 1960

fluviales en la zona de Puerto Natales. Un paréntesis: Después del evento sísmico de 1960 se realizaron estudios para intentar recuperar la navegabilidad del río Valdivia, puesto que una consecuencia de ese megaterremoto fue el descenso del suelo. Es así como el Instituto Nacional de Hidráulica (INH) llevó a cabo en 1970 y 1971 campañas de terreno y estudio en modelo físico, siendo lo relevante que se aplicó en terreno y modelo trazadores radiactivos para estudiar el problema de arrastre de sedimentos, aplicando esta técnica por vez primera en el país. Cierro paréntesis.

Finalmente me parece interesante transcribir las conclusiones a las que llega el autor:

“El objetivo de catalogar someramente los ríos de Chile, no es el de contribuir con un aporte modestísimo al estudio de la geografía nacional, sino que al considerar los defectos de nuestro sistema fluvial queremos ante todo buscar medios correctivos que nos permitan durante las próximas generaciones remediar el pecado mortal de abandono al que hemos expuesto el suelo nacional ya desde tiempos prehistóricos, destacando los siguientes peligros: deforestación de las cuencas, gran capacidad erosiva y de transporte de sedimento de los cauces, corrientes de agua subterránea que minan el subsuelo, embancamientos de los cauces y formación de barras, disminución de los caudales sobre todo en el norte, actividad sísmica que modifica los cauces fluviales”

No hay dudas que muchas de las observaciones y preocupación que manifiesta don Carlos siguen siendo motivo de preocupación e interés de ingenieros, académicos y de la comunidad nacional.

Antecedentes del autor: Don Carlos A. Finsterbusch nació en Valdivia el 6 de marzo de 1888 y falleció en Santiago el 2 de marzo de 1965. Además de la publicación aquí comentada publicó en 1934 otro libro titulado “Las dalcas de Chiloé y los Chilotes”. También incursionó en la pintura y uno de sus cuadros es de la corbeta Esmeralda, el cual se encuentra en el Club Naval de Valparaíso y data de 1932.

ALEJANDRO LÓPEZ ALVARADO

ala@vtr.net

NOTA DEL EDITOR: Motivado por el comentario del Ingeniero Alejandro López, una búsqueda de los trabajos de Carlos A. Finsterbusch me llevó a la publicación “*Preservación del Medio Ambiente Marino. Estudios presentados al Seminario Internacional sobre Preservación del Medio Ambiente Marino, organizado por el Instituto de Estudios Internacionales de la Universidad de Chile. 25-27 de Septiembre de 1975.*”, editado por Francisco Orrego Vicuña e impreso por la Editorial Universidad Técnica del Estado. En el artículo “Hacia una Administración Moderna de la Zona Costera de Chile”, por Víctor Ariel Gallardo, se cita el trabajo de C.A. Finsterbusch y se presenta una lista de algunas de sus publicaciones, todas en la revista “MAR”. A continuación, transcribo el listado de ellas, con la esperanza de motivar futuras contribuciones del Ing. López.

- De los ríos de Chile, I parte. *Mar*, 18 (120).1947.
- De los ríos de Chile. II parte. *Mar*, 18 (121): 117-127.1947.
- De los ríos de Chile. III parte. *Mar*, 18 (123): 164-173.1947.
- De los ríos de Chile. IV parte. *Mar*, 18 (124): 213-228. 1947.
- Carbón y agua. *Mar*, 18 (123): 190-196. 1947.
- Una pesquera marítima. *Mar*, 18 (121): 147-153. 1947.
- Puntas del litoral. *Mar*, 19 (125): 5-10. 1948.
- Puntas del litoral. *Mar*, 19 (126): 53-63. 1948.
- El puente de la vida. *Mar*, 19 (128): 149-162. 1948.
- Carbón, fuego elemental. *Mar*, 20(130): 5-12. 1949.
- Las islas del litoral. *Mar*, 20 (131): 75-89.1949.
- Las islas del litoral. II parte. *Mar*, 20 (132): 39-49. 1949.
- Las islas del litoral. III parte. *Mar*, 20 (133): 31-44. 1949.
- Investigaciones marítimas. *Mar*, 21 (134): 25-39. 1950.
- Investigaciones marítimas. *Mar*, 21 (135): 5-20. 1950.
- La migración de las aves. *Mar*, 21 (136): 3-14. 1950.
- Aves marinas. *Mar*, 21 (137): 55-81.1950.
- Defensa de nuestros recursos fluviales y lacustres. *Mar*, 22 (139): 5-24. 1951.
- Dragados. *Mar*, 22 (140): 7-19.1951.
- Río Valdivia. *Mar*, 22 (141): 6-18.1951.
- Corral. *Mar*, 23 (142): 5-10. 1952.
- Balance de dos siglos, 1750-1950. *Mar*. 23 (143): 3-11. 1952.

TURBIDITY CURRENT GENERATED BY SLOW FAILURE OF A VERTICAL SUBAQUEOUS FACE DUE TO BREACHING: SIMILARITY SOLUTION AND PROSPECTS FOR SELF-ACCELERATION

GARY PARKER¹, ESTHER EKE², ENRICA VIPARELLI³

¹ Department of Earth Science & Environmental Change and
Department of Civil and Environmental Engineering
University of Illinois Urbana-Champaign, Urbana IL 61081 USA

parkerg@illinois.edu

ORCID: 0000-0001-5973-5296

² Office of Sponsored Programs
University of Wisconsin Oshkosh, Oshkosh, WI 54901-8627 USA

eceke2@gmail.com

ORCID: 0000-0003-1962-0552

Department of Civil and Environmental Engineering
University of South Carolina, Columbia, SC 29208, USA

VIPARELL@cec.sc.edu

ORCID: 0000-0001-6733-9664

ABSTRACT

The process of “breaching” provides a potential means for the generation of sustained, self-accelerating turbidity currents in the ocean. Breaching describes the process of a slow failure of a nearly vertical submerged face of clean, fine sand. The nearly vertical face retreats slowly backward as sand particles spall off on a grain-by-grain basis rather than as a grain flow or flow liquefaction. This spalling creates a dilute turbidity current that moves vertically downward along the face. At the base of the face the turbidity current is turned nearly 90°, and then can move into deeper water down a much lower slope. The process of breaching has been observed to be sustained for many hours in the field; the resulting turbidity current can be expected to be sustained for a similar length of time. Here the principles of boundary layer analysis are applied to obtain a similarity solution for the downward-moving turbidity current created by breaching. This solution provides the upstream boundary conditions for the quasi-horizontal turbidity current farther downstream. The problem as to whether such the quasi-horizontal turbidity current self-accelerates is set up for future solution. Numerical evaluation of the boundary conditions suggests however, that it is likely that a regime exists for which breaching generates self-accelerating turbidity currents. Note: this paper was written in 2004 and has not been updated.

Keywords: Include five keywords that identify the content of the article.

1. THE PROBLEM: HOW TO GENERATE CONTINUOUS TURBIDITY CURRENTS

A turbidity current is a bottom flow driven downslope by the excess weight of sediment held in suspension. In the ocean turbidity currents are responsible for the excavation of deep submarine canyons on the continental slope, as well as the deposition of large deepwater submarine fans downslope. Many features of the morphology of turbidity currents, including deep canyons and meandering channels of high sinuosity on submarine fans, suggest that the turbidity currents that form these features are sustained events rather than simple pulses.

Various mechanisms have been proposed for the generation of sustained turbidity currents in the ocean. One of these mechanisms, i.e. hyperpycnal flows, requires that the river water entering the sea be so heavily laden with sediment that it is heavier than sediment-free seawater (Mulder and Syvitski, 1995). This requires a suspended sediment concentration in the river water of at least about 41,000 mg/l. This value is rarely reached in any river as it flows into the sea, and then only during extreme floods. In addition, all documented cases of hyperpycnal flows except the Yellow River, China are on active margins (Mulder and Syvitski, 1995). It is appropriate to delineate other, more realistic mechanisms that are appropriate both for active margins at high sea stand (interglacial periods) stand and passive margins at low sea stand (glacial periods).

There are today along active margins numerous submarine canyons with heads sufficiently close to shore that they have a direct supply of sediment from littoral drift or deltaic sedimentation. A similar condition likely prevailed at the last glacial maximum for many submarine canyons along passive margins. Storms can generate sustained turbidity currents in such canyons as long as a) the canyon head is in sufficiently shallow water and b) there is an abundant supply of sediment.

Inman et al. (1976) have described the initiation of sustained turbidity currents by storms in Scripps Submarine Canyon. Littoral drift delivers fine ($\sim 150 \mu\text{m}$), mud-free sand to the canyon head. Storms trigger the suspension of sand at and near the canyon head; this in turn causes the heavier sand-laden water to move down the canyon. If the storm-generated turbidity current is relatively weak, it dies as it moves down the canyon. As it does so, it deposits a layer of sand on the canyon bed. With sufficient storm strength and duration combined with a sufficient quantity of sand on the bed to act as “fuel,” however, a strong, erosive turbidity current forms, and sustains itself for hours until the canyon is depleted of easily erodible sand. This process is schematized in Figure 1.

Fukushima et al. (1985) and Parker et al. (1986) have developed a model to describe this process. As shown in Figure 1, it is assumed that wave stirring has created a turbidity current at the canyon head with layer thickness H_u , layer-averaged velocity U_u and layer-averaged volume sediment concentration C_u . Under some conditions the turbidity current deposits sediment downstream, loses driving force, decelerates and deposits sediment in a self-reinforcing cycle, resulting in a turbidity current that decays downstream. Under other conditions, however, even with relatively modest values of U_u and C_u , the current entrains

more sand from the bed, becomes heavier, accelerates down the slope and thus entrains even more sand in a self-reinforcing cycle of self-acceleration termed “ignition.” Thus a quasi-continuous, self-accelerating turbidity current can be sustained as long as a) agitation by wave action is sustained and b) loose sand on the bed is available as “fuel” for entrainment.

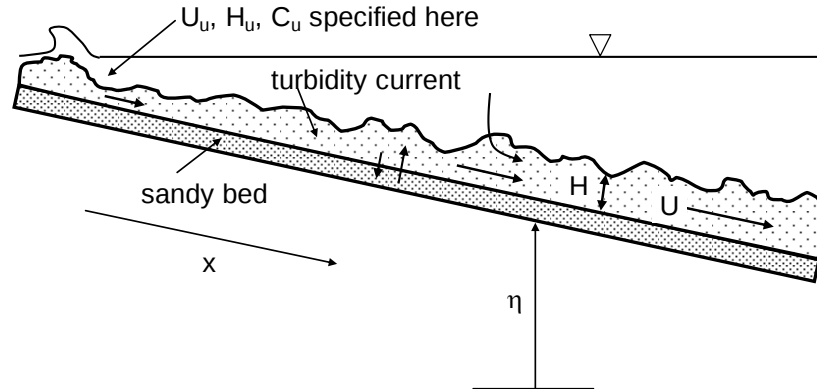


Figure 1. Schematic diagram illustrating sustained storm-induced turbidity currents.

Pratson et al. (2000, 2001) have shown that continuous agitation by storms is not actually necessary for the generation of sustained turbidity currents. That is, the current can start out as a pulse-like event near the canyon head, but then grow into a more powerful, sustained event farther downslope by means of the process of ignition.

Recently, however, Mastbergen and Van den Berg (2003) have offered an alternative explanation for the generation of continuous turbidity currents that does not seem to have been recognized heretofore. The phenomenon in question is called “breaching.” It is introduced below by means of a thought experiment

2. BREACHING FAILURE OF SUBMERGED SAND

Consider the static deposit of sand illustrated in Figure 2. The deposit is under still water, and the sand is assumed to be completely saturated with water. The slope angle of the pile is everywhere below the angle of repose. Now let a vertical face be excavated into the nose of the deposit, as shown in Figure 2. The sand must fail into the hole. How is this failure manifested?

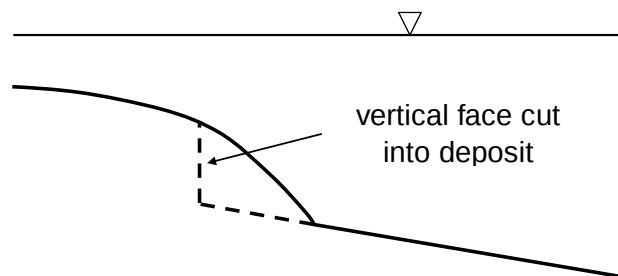


Figure 2. A subaqueous deposit with a vertical indentation cut into it.

In small-scale experiments using sufficiently coarse material, the sand fails by forming grain flows, resulting in a final surface at the angle of repose (Figure 3). At larger scale, if the sand deposit is loosely packed (contractant), it may liquefy and form a more deep-seated flow that goes farther and deposits at a lower angle. In either of these cases, however, the flow event is very short and a new static equilibrium is rapidly reached.

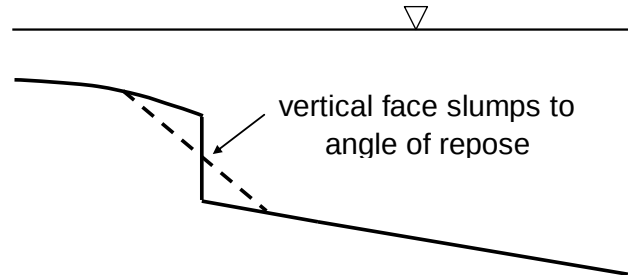


Figure 3. The vertical indentation is filled by a grain flow, resulting in a final deposit at the angle of repose

Van den Berg et al. (2002) have, however, identified a very different mode of failure that they term “breaching.” Under the right conditions, the sand slowly spalls grain-by-grain off the vertical face, forming a turbidity current directed vertically downward (Figure 4). The vertical face marches slowly backward in time at a roughly constant velocity. The downward turbidity current hits the base of the face, turns the corner and heads downstream at a much lower angle, as shown in Figure 4.

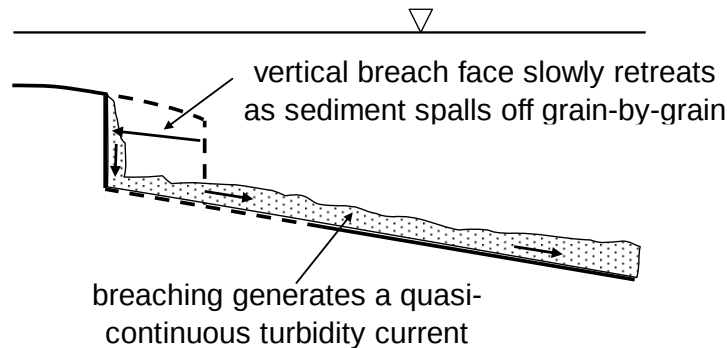


Figure 4. Breaching and the resulting continuous turbidity current

The conditions for breaching appear to be as follows. 1) The sand must not be too coarse, i.e. less than about 200 μm ; 2) the sand must be clean, without fines in the matrix to block the pores and reduce the hydraulic conductivity; and 3) the sand must be somewhat densely packed (dilatant), with a porosity less than about 0.43 (Van den Berg et al., 2002). As a particle of sand is removed from the vertical face the local packing is reduced, so generating a local deficit in pore pressure. If the particle is sufficiently small, the particle is momentarily held in place by suction before it falls away. As the particle falls away the local suction is relieved by groundwater flow (as long as the sand is clean). The result is a grain-by-grain failure, and thus the slow retreat of a nearly vertical slope.

Breaching has been observed in the field under natural conditions, where it can be sustained for many hours. In the Netherlands it is commonly induced artificially in the field as an aid to dredging (Van den Berg et al., 2002). A small investment in dredging is often enough to start the breaching process; the resulting turbidity current of Figure 3 often acts as a conveyor belt to carry the eroded sand into deep water where no dredging is required. Breaching has also been observed and studied in the laboratory. Most of the information pertaining to experimental studies is contained in the “gray literature,” but a comprehensive set of references is provided in Van den Berg et al. (2002).

3. BREACHING AS AN UPSTREAM BOUNDARY CONDITION FOR CONTINUOUS TURBIDITY CURRENTS

Consider the diagram of Figure 5. The illustrated turbidity current can be divided into two regions. In the first of these regions the flow is oriented in the vertically downward z direction parallel to the breach face. The origin of the z coordinate is at the top of the breach face. At the base of the breach face the flow makes a sharp turn, becoming quasi-horizontal in the sense that the bed slope angle θ satisfies the conditions

$$\cos \theta \cong 1 \quad , \quad \sin \theta \cong \tan \theta = S \quad (1a,b)$$

where S denotes bed slope. The streamwise coordinate in the quasi-horizontal region of flow is denoted as x . It should be noted that the bed slope S can be fairly substantial and still satisfy (1a,b). For example, for a bed slope S of 0.01, $\cos \theta = 0.9950$ and $\sin \theta = 0.0995$.

A solution of the turbidity current on the vertical region provides an upstream boundary condition for the quasi-horizontal turbidity current. Let $H_v(z)$, $C_v(z)$ and $W(z)$ denote turbidity current thickness, layer-averaged volume suspended sediment concentration and layer-averaged vertical velocity on the vertical region. The base of the breach face is located at $z = Z_b$, where Z_b denotes the height of the breach face (Figure 5). The current thickness, layer-averaged volume concentration of suspended sediment and layer-averaged streamwise velocity on the quasi-horizontal region are denoted as $H(x)$, $C(x)$ and $U(x)$ respectively. The breach face is located at $x = s_u(t)$, where s_u denotes the location of a boundary that moves with the retreating breach face and t denotes time. The upstream boundary conditions for the quasi-horizontal region are thus

$$H|_{x=s_u} = H_v|_{z=Z_b} \quad , \quad C|_{x=s_u} = C_v|_{z=Z_b} \quad , \quad U|_{x=s_u} = W|_{z=Z_b} \quad (2a,b,c)$$

4. GOVERNING EQUATIONS FOR A STEADY QUASI-HORIZONTAL TURBIDITY CURRENT

THREE-EQ. MODEL Before considering the turbidity current in the vertical region of Figure 5, it is useful to review the governing equations of the current in the quasi-horizontal region of the same figure. Fukushima et al. (1985) and Parker et al. (1986) have developed

approximate layer-averaged equations to describe the dynamics of continuous turbidity currents on beds with slope angles θ that are small enough to satisfy (1a,b). Their formulation assumes a quasi-steady flow that is free to develop in the streamwise direction. Let x denote the downstream direction, t denote time, η denote bed elevation, H denote an appropriate measure of turbidity current layer thickness, U denote layer-averaged downstream flow velocity and C denote layer-averaged volume concentration of suspended sediment. The suspension is assumed to be dilute, so that $C \ll 1$. Parker et al. (1986) used the slender flow (boundary layer) approximations applied to the relevant Reynolds-averaged balance equations to obtain the following equations governing the flow:

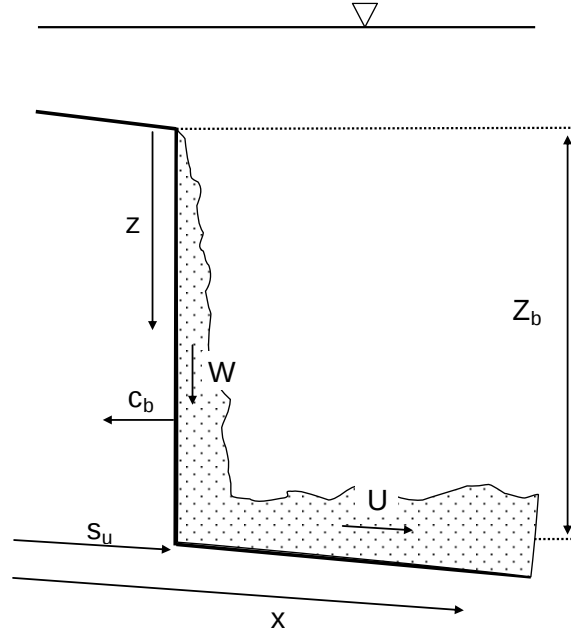


Figure 5. Diagram illustrating the continuous turbidity current created by breaching.

$$\frac{dUH}{dx} = e_w U \quad (3)$$

$$\frac{dU^2 H}{dx} = -\frac{1}{2} Rg \frac{dCH^2}{dx} + RgCHS - C_f U^2 \quad (4)$$

$$\frac{dUCH}{dx} = v_s (E - r_0 C) \quad (5)$$

In the above relations g denotes the acceleration of gravity and C_f denotes a dimensionless bed friction coefficient such that boundary shear stress at the bed τ_b is given as

$$\tau_b = \rho C_f U^2 \quad (6)$$

where ρ denotes the density of sediment-free water. The bed slope S is given as

$$S = -\frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (7)$$

In addition v_s denotes the fall velocity of the sediment (assumed to be sand here), r_0 is a dimensionless coefficient relating near-bed volume sediment concentration to the layer-averaged value C , E is a dimensionless rate of entrainment of bed sediment into suspension, e_w is a dimensionless rate of entrainment of ambient sediment-free water from above into the turbidity current and R denotes the submerged specific gravity of the sediment, given as

$$R = \frac{\rho_s}{\rho} - 1 \quad (8)$$

where ρ_s denotes the material density of sediment. In the case of quartz, for example, R is near 1.65.

In order to close the above formulation, Fukushima et al. (1985) and Parker et al. (1986) assume a) a constant, specified friction coefficient C_f ; b) the following relation for r_0 ;

$$r_0 = 1 + 31.5 \left(\frac{u_*}{v_s} \right)^{-1.46}, \quad u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{C_f U} \quad (9a,b)$$

c) the following relation for the entrainment coefficient of water e_w ;

$$e_w = \frac{0.00153}{0.0204 + Ri} \quad (10)$$

where Ri denotes the the bulk Richardson number of the flow, given as

$$Ri = \frac{RgCH}{U^2} \quad (11)$$

and d) a specified relation between the dimensionless entrainment rate E of sediment from the bed and the intensity of the flow. The relation actually used for E by Fukushima et al. (1985) and Parker et al. (1986) has been superseded by newer relations such as that of Garcia and Parker (1991); it suffices to note that the appropriate relation can be cast in the general form

$$E = E \left(\frac{U}{v_s}, Re_p \right) \quad (12)$$

where Re_p denotes a particle Reynolds number, given as

$$Re_p = \frac{\sqrt{RgD} D}{\nu} \quad (13)$$

In the above relation D denotes the grain size of the sand and ν denotes the kinematic viscosity of water.

With the above closure relations (3), (4) and (5) constitute three first-order differential equations for the three unknowns H , C and U . They may be solved in the downstream direction as long as the flow is supercritical in the sense that $Ri < 1$. This requires in particular that the upstream Richardson Ri_u at $x = s_u$ satisfy the same constraint, i.e.

$$Ri_u = \frac{RGC_u H_u}{U_u^2} < 1 \quad (14)$$

where in the case of the geometry of Figure 5,

$$H_u = H|_{x=s_u}, \quad C_u = C|_{x=s_u}, \quad U_u = U|_{x=s_u} \quad (15a,b,c)$$

The model of Fukushima et al. (1985) and Parker et al. (1986) for the spatial self-acceleration of a sustained turbidity current is briefly explained here. A complete explanation can be found in the original papers. For some choices of H_u , C_u and U_u satisfying (14), a solution of (3), (4) and (5) in the downstream direction has the characteristic that both U and C eventually increase monotonically downstream. This is because a) the entrainment rate $v_s E$ exceeds the deposition rate $v_s r_0 C$ in (5), resulting in a downstream increase in the suspended load, which in turn b) renders the downstream pull of gravity $RgCHS$ in (4) ever larger than the resistance term $C_f U^2$, causing a downstream increase in the momentum discharge, in a self-reinforcing cycle. Fukushima et al. (1985) found that with appropriate choices of H_u and C_u , values of U_u as small as 0.54 m/s are sufficient to induce a self-accelerating turbidity current in Scripps Submarine Canyon.

In a complete model of self-accelerating turbidity currents, it is also necessary to track the evolving bed elevation in terms of the Exner equation of conservation of bed sediment. In the case for which the bed is always covered with erodible sand of the same size as that carried by the turbidity current, this relation takes the form

$$(1 - \lambda_p) \frac{\partial \eta}{\partial t} = v_s (r_0 C - E) \quad (16)$$

where λ_p denotes the porosity of the sediment deposit.

5. GOVERNING EQUATIONS FOR A VERTICAL TURBIDITY CURRENT

In the original research of Fukushima et al. (1985) it was assumed that wave action near the head of Scripps Submarine Canyon was sufficient to yield values of H_u , C_u and U_u for self-acceleration. Mastbergen et al. (2003) have argued, however, that breaching itself might be sufficient to provide such values. In order to quantify this further, it is necessary to solve for the vertical turbidity current of Figure 5.

The vertical turbidity current of Figure 5 constitutes an example of a boundary layer. The relevant integral governing equations are

$$\frac{dWH_v}{dz} = e_w W \quad (17)$$

$$\frac{dW^2 H_v}{dz} = RgC_v H_v - C_f W^2 \quad (18)$$

$$\frac{d(W + v_s)C_v H_v}{dz} = E_b \quad (19)$$

In the above equations H_v , C_v and W are the layer thickness, layer-averaged suspended sediment concentration and layer-averaged downward vertical velocity, respectively, of the vertical turbidity current of Figure 5. The parameter E_b denotes the volume rate of spalling of sand from the breach face per unit area normal to the face. It must be constant in z if the vertical face is to be maintained as it retreats, and is related to the speed of retreat c_b of the breach face as

$$c_b \equiv -\frac{ds_u}{dt} = \frac{E_b}{1 - \lambda_p} \quad (20)$$

Note that c_b is defined to be positive for a retreating breach face.

6. SIMILARITY SOLUTION FOR THE VERTICAL TURBIDITY CURRENT ON THE BREACH FACE

The following assumptions are made in (17), (18) and (19): a) C_f is assumed to be constant; b) since the entrainment of clear water into the vertical turbidity current is not impeded by turbulence suppression due to a buoyancy difference (the mixing occurs orthogonally to the vertical), e_w takes the maximum value allowed by (10), i.e.

$$e_w = 0.075 \quad (21)$$

and c) it is assumed that

$$\frac{v_s}{W} \ll 1 \quad (22)$$

allowing (19) to be approximated as

$$\frac{dWC_v H_v}{dz} = E_b \quad (23)$$

In so far as the fall velocity v_s for 150 μm sand in pure water at 20°C is close to 1.4 cm/s, (21) is likely to be valid everywhere except in a small range close to $z = 0$.

Under the above assumptions (17), (18) and (23) allow the following similarity solution:

$$H_v = \frac{3}{4} e_w z \quad (24)$$

$$C_v = \frac{4}{3e_w} \left(\frac{5}{4} e_w + C_f \right)^{1/3} \left(\frac{Rgz}{E_b^2} \right)^{-1/3} \quad (25)$$

$$\frac{W}{E_b} = \frac{1}{\left(\frac{5}{4} e_w + C_f \right)^{1/3}} \left(\frac{Rgz}{E_b^2} \right)^{1/3} \quad (26)$$

Note that layer thickness H_v increases linearly in z , layer-averaged suspended sediment concentration C_v decreases as $z^{-1/3}$ and layer-averaged flow velocity W increases as $z^{1/3}$. A locally spurious infinite concentration C_v is attained at $z = 0$ for the same reason that the Blasius solution for the flat-plate boundary layer formulation of Prandtl (as quoted in Schlichting, 1968) yields an infinite boundary shear stress at the leading edge of the plate.

The Richardson number of the vertical turbidity current is found to be everywhere constant, given by the value

$$Ri = \frac{5}{4} e_w + C_f \quad (27)$$

The above relation nearly guarantees that for all realistic values of C_f the flow satisfies the condition $Ri \ll 1$. For example, for the very high value of C_f of 0.05 and (21), it is found that $Ri = 0.144$. As a result, the flow at the upstream end of the quasi-horizontal region of Figure 5 will also be supercritical, allowing for the downstream solution of (3), (4) and (5) to study self-acceleration.

7. BOUNDARY CONDITIONS FOR THE QUASI-HORIZONTAL TURBIDITY CURRENT

Noting from Figure 5 that $z = Z_b$ at the base of the breach face, (24), (25) and (27) combined with (2) and (15) yield the following boundary conditions on (3), (4) and (5) describing the evolution of the turbidity current on the quasi-horizontal region:

$$H_u = \frac{3}{4} e_w Z_b \quad (28)$$

$$C_u = \frac{4}{3e_w} \left(\frac{5}{4} e_w + C_f \right)^{1/3} \left(\frac{RgZ_b}{E_b^2} \right)^{-1/3} \quad (29)$$

$$\frac{U_u}{E_b} = \frac{1}{\left(\frac{5}{4} e_w + C_f \right)^{1/3}} \left(\frac{RgZ_b}{E_b^2} \right)^{1/3} \quad (30)$$

A sample evaluation is in order. Mastbergen et al. (2003) estimate the velocity of retreat c_b of the breach face as equal to 20 ~ 25 times the permeability k of the sand. Using a value of 25, then,

$$c_b = 25k \quad , \quad E_b = \frac{25k}{1 - \lambda_p} \quad (31a,b)$$

The following case is considered: $k = 0.01$ cm/s, $\lambda_p = 0.4$, $C_f = 0.02$, $R = 1.65$ (quartz) and $Z_b = 5$ m. The value of e_w is given by (20). The values of c_b and E_b given by (30a,b) are thus 0.0025 m/s (216 m/day) and 0.00417 m/s, respectively. The computed values of H_u , C_u and U_u are 0.281 m, 0.0516 and 1.44 m/s.

8. CONTINUITY CONDITION FOR BREACH HEIGHT

Consider the diagram of Figure 6. The sediment surface above the top of the breach face has (fixed) elevation η_t at $x = 0$ and slope S_t (assumed constant here for convenience). The bed elevation $\eta[s_u(t), t]$ at the base of the breach face is thus given by the following continuity condition:

$$\eta[s_u(t), t] = \eta_t - S_t s_u(t) - Z_b(t) \quad (32)$$

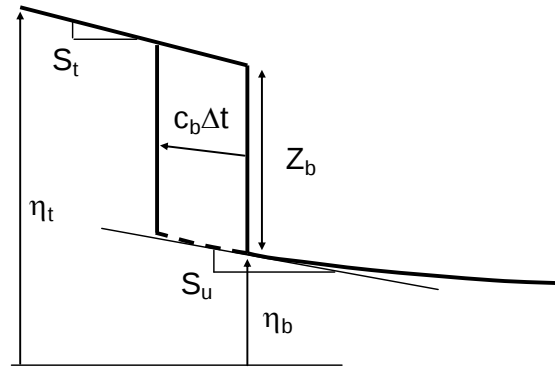


Figure 6. Definition of variables for breach height

Taking the derivative of both sides of (32) with respect to time and reducing with (20), it is found that

$$\dot{Z}_b \equiv \frac{dZ_b}{dt} = (S_t - S_u)c_b - \frac{\partial \eta}{\partial t} \Big|_{x=s_u} \quad , \quad S_u = -\frac{\partial \eta}{\partial z} \Big|_{x=s_u} \quad (33a,b)$$

Note that S_u denotes the bed slope of the quasi-horizontal region at the base of the breach face.

Equation (32a) allows an interesting possibility. If $S_t > S_u$, it is possible that $\dot{Z}_b > 0$, in which case breach height grows as the breach retreats. This provides the possibility of turbidity currents that become ever stronger as the breach face retreats.

9. PROSPECTS FOR CONTINUOUS SELF-ACCELERATING QUASI-HORIZONTAL TURBIDITY CURRENTS GENERATED BY BREACHING

The problem of the self-acceleration of a quasi-horizontal turbidity current driven by breaching is best formulated in terms of moving boundary coordinates. To this end let

$$\bar{x} = x - s_u(t) \quad , \quad \bar{t} = t \quad (34)$$

Equations (3), (4), (5), (16), (28), (29), (30) and (33a) thus transform with the aid of (20) to

$$\frac{dUH}{d\bar{x}} = e_w U \quad (35)$$

$$\frac{dU^2 H}{d\bar{x}} = -\frac{1}{2} Rg \frac{dCH^2}{d\bar{x}} + RgCH \frac{\partial \eta}{\partial \bar{x}} - C_f U^2 \quad (36)$$

$$\frac{dUCH}{d\bar{x}} = v_s (E - r_0 C) \quad (37)$$

$$(1 - \lambda_p) \left(\frac{\partial \eta}{\partial \bar{t}} + c_b \frac{\partial \eta}{\partial \bar{x}} \right) = v_s (r_0 C - E) \quad (38)$$

$$H|_{\bar{x}=0} = \frac{3}{4} e_w Z_b \quad (39)$$

$$C|_{\bar{x}=0} = \frac{4}{3e_w} \left(\frac{5}{4} e_w + C_f \right)^{1/3} \left(\frac{RgZ_b}{E_b^2} \right)^{-1/3} \quad (40)$$

$$\frac{U|_{\bar{x}=0}}{E_b} = \frac{1}{\left(\frac{5}{4} e_w + C_f \right)^{1/3} \left(\frac{RgZ_b}{E_b^2} \right)^{1/3}} \quad (41)$$

$$\dot{Z}_b = S_t c_b - \frac{\partial \eta}{\partial \bar{t}} \Big|_{\bar{x}=0} \quad (42)$$

The actual solution of the above equations is left to the future. It suffices to mention that a comparison of sample evaluations of the boundary conditions (39), (40) and (41) with the work of Fukushima et al. (1985) and Parker et al. (1986) suggest that it is highly likely that a range of initial bed slopes S exist such that the continuous turbidity current generated by breaching undergoes self-acceleration downstream.

10. CONCLUSIONS

The breaching of subaqueous sand provides a possible mechanism for the generation of continuous turbidity currents that self-accelerate (ignite) downstream. Here a similarity solution is presented for downward vertical turbidity current generated by breaching. Once this turbidity current reaches the base of the breach face, it must turn and become a quasi-

horizontal turbidity current. The solution for the vertically downward region of the turbidity current yields the upstream boundary conditions for the resulting quasi-horizontal turbidity current. The problem of the quasi-horizontal flow is thus set up, but not solved. The boundary conditions for this flow suggest strongly, however, that a range of conditions exist for which breaching generates a continuous, self-accelerating quasi-horizontal turbidity current.

ACKNOWLEDGMENTS

This research was funded by the National Science Foundation (Grant No. EAR-0207303, Collaborative research: sedimentation of particles of varying size and density) and the National Center for Earth-surface Dynamics (NCED). NCED is a Science and Technology Center funded by the National Science Foundation. This paper represents a contribution of NCED in the area of channel dynamics. Discussions with J.H. van den Berg, D.R. Mastbergen, T. Muto and M. de Groot proved very helpful in the derivation of the above formulation.

REFERENCES

- Fukushima, Y., G. Parker, H.M. Pantin (1985) "Prediction of ignitive turbidity currents in Scripps Submarine Canyon." *Marine Geology*, 67, 55-81.
- Garcia, M., G. Parker (1991) "Entrainment of bed sediment into suspension." *J. Hyd. Eng.*, 117(4), 414-435.
- Inman, D.L., C.E. Nordstrom, R.E. Flick (1976) "Currents in submarine canyons: an air-sea-land interaction." *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 275-310.
- Mastbergen, D.R., J.H. van den Berg (2003) "Breaching in fine sands and the generation of sustained turbidity currents in submarine canyons." *Sedimentology*, 50(4), 625-637.
- Mulder, T., J.P.M. Syvitski (1995) "Turbidity currents generated at river mouths during exceptional discharges to the world oceans." *J. Geology*, 103, 285-299.
- Parker, G., Y. Fukushima, H. Pantin (1986) "Self-accelerating turbidity currents." *J. Fluid Mech.*, 171, 145-181.
- Pratson, L.F., J. Imran, G. Parker, J.P.M. Syvitski, E. Hutton (2000) "Debris flows versus turbidity currents: a modeling comparison of their dynamics and deposits." In *Fine-grained turbidite systems*, A. H. Bouma and C. G. Stone (Eds.), AAPG Memoir 72 /SEPM Special Publication 68, 57-72.
- Pratson, L.F., J. Imran, E. Hutton, G. Parker, J.P.M. Syvitski (2001) "BANG1D: A one-dimensional Lagrangian model of turbidity current mechanics." *Computers and Geosciences*, 27(6), 701-716.
- Schlichting, H. (1968) *Boundary Layer Theory*. McGraw Hill, New York, 748 p.
- van den Berg, J.H., A van Gelder, D.R. Mastbergen (2002) "The importance of breaching as a mechanism of subaqueous slope failure in fine sand." *Sedimentology*, 49(1), 81-95.

ABOUT THE AUTHORS

Gary Parker received his undergraduate degree in 1971 from Johns Hopkins University, USA, and his doctoral degree from the University of Minnesota in 1974. He has been a

faculty member at the University of Alberta Canada, the University of Minnesota, USA and the University of Illinois Urbana-Champaign, USA His field is sediment transport and morphodynamics of rivers and the deep sea. He retired in 2022, but remains active as a researcher.

Esther Eke received her undergraduate degree in 2005 from the University of Lagos, Nigeria, and her doctoral degree from the University of Illinois Urbana-Champaign, USA in 2013. She has worked in the field as postdoctoral associate at Johns Hopkins University, USA and Utah State University, USA. She currently serves as the Director of Sponsored Programs at University of Wisconsin Oshkosh but remains active as a researcher in the field of sediment transport and river morphodynamics.

Enrica Viparelli received her doctoral degree from the University of Naples Federico II, Italy, in 2008. She continued her studies as post-doctoral researcher in the Department of Civil and Environmental Engineering at the University of Illinois at Urbana-Champaign, where she had conducted her doctoral research as visiting scholar. She joined the faculty of the Department of Civil and Environmental Engineering at the University of South Carolina in 2012, where she was promoted to Professor in 2022.

PROCESS-BASED MODELING OF ARSENIC REMOVAL IN SUBSURFACE FLOW CONSTRUCTED WETLANDS: PRELIMINARY RESULTS FOR PHYSICAL AND CHEMICAL PROCESSES

DIEGO BRAVO-RIQUELME¹, KATHERINE LIZAMA-ALLENDE²,
YARKO NIÑO³

¹Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile, Santiago, Chile

diego.bravo@ing.uchile.cl

ORCID: 0009-0001-6679-3467

²Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile, Santiago, Chile

klizama@ing.uchile.cl

ORCID: 0000-0003-3911-6919

³Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile, Santiago, Chile

ynino@ing.uchile.cl

ORCID: 0000-0002-0108-2656

ABSTRACT

Constructed wetlands are natural water treatment systems able to remove several pollutants from water, including As, a metalloid with a worldwide concern due to its toxicity. Chile is one of the main countries affected by the presence of this element in natural waters. A process-based As(III) removal model was developed in horizontal subsurface flow-constructed wetlands. The model was successfully validated using the experimental data from an unplanted horizontal subsurface constructed wetland prototype, operated by Dr. María Cecilia Valles-Aragón in Chihuahua, Mexico, with a flow feeding of synthetic water containing sodium arsenite (NaAsO_2), an As(III) compound. The model formulation comprises a reactive transport equation considering advection, dispersion, sorption to the granular media, precipitation of three As(III) minerals, and coprecipitation with iron (oxy)hydroxides. Results indicate that the processes that mainly remove As(III) in the system are sorption to the granular media and coprecipitation with iron (oxy)hydroxides. The model was validated using the experimental data from the wetland prototype, operated in Chihuahua, Mexico, and average values for As, Fe, dissolved oxygen concentrations, and pH. Fitted parameters for sorption are Langmuir equilibrium constants $K_{L,d} = 1.195 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{mg}$, and $q_{max,d} = 1.687 \text{ mg/kg}$. Fitted parameters for coprecipitation are Langmuir kinetic constants $k_{a,c} = 0.0291 \text{ 1/h}$, $K_{L,c} = 7.311 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{mg}$, and $q_{max,c} = 1.455 \text{ mg/kg}$. Simulation results showed that the kinetic parameters of precipitation minerals do not impact the As(III) concentration. Thus, precipitation phenomena do not affect As(III) removal and probably do not occur in the system. The model is being improved by adding the effect of other variable species concentrations -such as Fe, dissolved oxygen, and pH- in the main

As(III) transport equation. Future versions will include the effects of vegetation in planted systems.

Keywords: arsenic removal; modeling; constructed wetlands; sorption; precipitation.

1. INTRODUCTION

Arsenic (As) in aquatic systems is a worldwide problem of concern due to its toxicity (Jain & Singh, 2012) and toxic effects on the human organism, such as risks of cancer and skin changes such as pigmentation and hyperkeratosis (IPCS, 2001). The levels of exposure in Chile due to As concentration in water are among the highest in the world (Raju, 2022). Currently, different technologies are implemented in conventional water treatment plants to remove As, such as coprecipitation/sorption and ion exchange (Henke, 2009).

Constructed wetlands are nature-based solution treatment systems that remove different pollutants from water, including As. They are widely used to treat domestic and agricultural wastewater, especially in rural areas (Sun & Saeed, 2009). However, they are not commonly used in treating heavy metals and metalloids despite being capable of removing them (Bravo-Riquelme & Lizama-Allende, 2024).

Constructed wetlands are a promising alternative to remove arsenic as a low-cost, low-environmental impact alternative compared to conventional treatment technologies. However, since they are complex systems where many physical, chemical, and biological processes occur in parallel and influence each other, developing mathematical models is still a work in progress (Bravo-Riquelme & Lizama-Allende, 2024).

This work aims to develop and implement a process-based mathematical model for As(III) removal in a subsurface flow constructed wetland unplanted system and to calibrate and validate the model using simulations and parameters fitting according to collected experimental data by Dr. María Cecilia Valles-Aragón from an unplanted wetland prototype located in Chihuahua, Mexico.

2. METHODOLOGY

2.1 Model formulation

Chemical reactions in the studied constructed wetland prototype that are considered to be in equilibrium are shown in Table 1. These reactions directly impact the distribution of the relevant species in the aqueous and solid phase (granular wetland media), and they are not considered to be limited by kinetics. Thus, equilibrium was assumed considering the reported equilibrium constants.

Table 1. Equilibrium reactions for the wetland system. All phases are (aq) unless specified.

REACTION	REFERENCE	log K _{eq} (25°C)
$\text{H}^+ + \text{OH}^- \rightleftharpoons \text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}$	Snoeyink & Jenkins (1991)	-14
$\text{H}_2\text{CO}_3 \rightleftharpoons \text{HCO}_3^- + \text{H}^+$	Snoeyink & Jenkins (1991)	-6.36
$\text{HCO}_3^- \rightleftharpoons \text{CO}_3^{2-} + \text{H}^+$	Snoeyink & Jenkins (1991)	-10.33
Arsenite, As(III)		
$\text{H}_3\text{AsO}_3 \rightleftharpoons \text{H}_2\text{AsO}_3^- + \text{H}^+$	Lizama et al. (2011)	-9.23
$\text{H}_2\text{AsO}_3^- \rightleftharpoons \text{HAsO}_3^{2-} + \text{H}^+$	Lizama et al. (2011)	-10.99
Iron, Fe(II)		
$\text{Fe}^{2+} + \text{H}^+ + 0.25 \text{O}_{2(\text{g})} \rightleftharpoons \text{Fe}^{3+} + 0.5 \text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}$	Llorens et al. (2013)	44.36
$\text{Fe}(\text{OH})_{2(\text{s})} \rightleftharpoons \text{Fe}^{2+} + 2 \text{OH}^-$	Snoeyink & Jenkins (1991)	-16.31
$\text{FeCO}_{3(\text{s})} \rightleftharpoons \text{Fe}^{2+} + \text{CO}_3^{2-}$	Snoeyink & Jenkins (1991)	-10.51
$\text{Fe}^{2+} + \text{H}_2\text{O}_{(\text{l})} \rightleftharpoons \text{Fe}(\text{OH})^+ + \text{H}^+$	Snoeyink & Jenkins (1991)	-6.77
$\text{Fe}^{2+} + 3 \text{H}_2\text{O}_{(\text{l})} \rightleftharpoons \text{Fe}(\text{OH})_3 + 3 \text{H}^+$	Snoeyink & Jenkins (1991)	-30.73
$\text{Fe}^{2+} + 4 \text{H}_2\text{O}_{(\text{l})} \rightleftharpoons \text{Fe}(\text{OH})_4^{2-} + 4 \text{H}^+$	Snoeyink & Jenkins (1991)	-45.15
Iron, Fe(III)		
$\text{Fe}(\text{OH})_{3(\text{s})} \rightleftharpoons \text{Fe}^{3+} + 3 \text{OH}^-$	Snoeyink & Jenkins (1991)	-38.56
$\text{Fe}^{3+} + \text{H}_2\text{O}_{(\text{l})} \rightleftharpoons \text{Fe}(\text{OH})^{2+} + \text{H}^+$	Snoeyink & Jenkins (1991)	-2.18
$\text{Fe}^{3+} + 2 \text{H}_2\text{O}_{(\text{l})} \rightleftharpoons \text{Fe}(\text{OH})_2^+ + 2 \text{H}^+$	Snoeyink & Jenkins (1991)	-7.18
$2 \text{Fe}^{3+} + 2 \text{H}_2\text{O}_{(\text{l})} \rightleftharpoons \text{Fe}_2(\text{OH})_2^{4+} + 2 \text{H}^+$	Snoeyink & Jenkins (1991)	-2.87
$\text{Fe}^{3+} + 4 \text{H}_2\text{O}_{(\text{l})} \rightleftharpoons \text{Fe}(\text{OH})_4^- + 4 \text{H}^+$	Snoeyink & Jenkins (1991)	-23.00
Dissolution of the granular media		
$\text{SiO}_{2(\text{s})} \rightleftharpoons \text{SiO}_2$	Llorens et al. (2013)	4.00
$\text{K}(\text{AlSi}_3)\text{O}_{8(\text{s})} + 4 \text{H}^+ \rightleftharpoons \text{Al}^{3+} + \text{K}^+ + 3 \text{SiO}_2 + 2 \text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}$	Llorens et al. (2013)	1.13
$\text{KAl}_2(\text{OH})_2(\text{Si}_3\text{AlO}_{10})_{(\text{s})} + 10 \text{H}^+ \rightleftharpoons 3 \text{Al}^{3+} + \text{K}^+ + 3 \text{SiO}_2 + 6 \text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}$	Llorens et al. (2013)	-11.02
$(\text{Al,Mg})_2\text{Si}_4\text{O}_{10}(\text{OH})_{2(\text{s})} + 6 \text{H}^+ \rightleftharpoons 1.67 \text{Al}^{3+} + 0.5 \text{Mg}^{2+} + 4 \text{SiO}_2 + 3 \text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}$	Llorens et al. (2013)	-0.96
Aluminium, Al(III)		
$\text{Al}(\text{OH})_{3(\text{s})} \rightleftharpoons \text{Al}^{3+} + 3 \text{OH}^-$	Snoeyink & Jenkins (1991)	-33.00
$\text{Al}^{3+} + \text{H}_2\text{O}_{(\text{l})} \rightleftharpoons \text{Al}(\text{OH})^{2+} + \text{H}^+$	Snoeyink & Jenkins (1991)	-4.91
$2 \text{Al}^{3+} + 2 \text{H}_2\text{O}_{(\text{l})} \rightleftharpoons \text{Al}_2(\text{OH})_2^{4+} + 2 \text{H}^+$	Snoeyink & Jenkins (1991)	-6.30
$7 \text{Al}^{3+} + 17 \text{H}_2\text{O}_{(\text{l})} \rightleftharpoons \text{Al}_7(\text{OH})_{17}^{4+} + 17 \text{H}^+$	Snoeyink & Jenkins (1991)	-48.80
$13 \text{Al}^{3+} + 34 \text{H}_2\text{O}_{(\text{l})} \rightleftharpoons \text{Al}_{13}(\text{OH})_{34}^{5+} + 34 \text{H}^+$	Snoeyink & Jenkins (1991)	-97.40
$\text{Al}^{3+} + 4 \text{H}_2\text{O}_{(\text{l})} \rightleftharpoons \text{Al}(\text{OH})_4^- + 4 \text{H}^+$	Snoeyink & Jenkins (1991)	-22.46
As(III) adsorption onto Fe(OH)_{3(s)}		
$^*\text{OH}_{(\text{sup.})} + \text{H}_3\text{AsO}_3 \rightleftharpoons ^*\text{H}_2\text{AsO}_3_{(\text{sup.})} + \text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}$	Henke (2009)	-
$^*\text{OH}_{(\text{sup.})} + \text{H}_2\text{AsO}_3^- \rightleftharpoons ^*\text{HAsO}_3^-_{(\text{sup.})} + \text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}$	Henke (2009)	-
$^*\text{OH}_{(\text{sup.})} + \text{HAsO}_3^{2-} \rightleftharpoons ^*\text{AsO}_3^{2-}_{(\text{sup.})} + \text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}$	Henke (2009)	-

The main equation of this model is a mass balance transport equation including advection, dispersion and reaction terms, which in its general form is shown in Eqn. (1).

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -v\nabla C + \nabla D(\nabla C) - \sum_j R_j \quad (1)$$

where C is the solute concentration [$\mu\text{g/L}$], v is the flow velocity [m/h], D is the dispersion coefficient [m^2/h], r_j is the consumption rate of solute due to reaction j [$\mu\text{g}/(\text{L h})$], and t is the time [h].

A list of all parameters included in this work is shown in Table 2. Eqn. (1) is simplified to Eqn. (2), a longitudinal one-dimensional model for As(III) as a solute (in the form of H_3AsO_3) which considers advection, dispersion and three relevant reaction phenomena: sorption to the granular media, precipitation of minerals and coprecipitation with iron (oxy)hydroxides represented by the species $\text{Fe}(\text{OH})_{3(s)}$, also known as ferrihydrite (Fh), which was chosen since Fh has the higher arsenic uptake capacity than other iron (oxy)hydroxides (Wang et al., 2022). The equation is:

$$r_f \frac{\partial C_{As}}{\partial t} = -v_x \frac{\partial C_{As}}{\partial x} + D_x \frac{\partial^2 C_{As}}{\partial x^2} - \sum_m R_m - q_{max,c} X \frac{\partial \theta_c}{\partial t} \quad (2)$$

where C_{As} is the As(III) concentration in the solution [$\mu\text{g/L}$], as $\text{H}_3\text{AsO}_{3(aq)}$, in time t [h] and horizontal position x [m], thus being the state variable of the model $C_{As}(t, x)$. r_f is a retardation factor and R_m is the precipitation rate of mineral m [$\mu\text{g}/(\text{L h})$]. For each equilibrium equation, the active concentration of the i -th species ($\{i\} = \gamma_i C_i$) is assumed to be equal to its molar concentration (C_i) [mol/L] since the solution is considered diluted due to its low concentrations of every dissolved species. As such, all activity coefficients (γ_i) are equal to 1. In Table 2, a list of other parameters of Eqn. (2) are given.

2.1.1 Sorption to the granular media

The dimensionless term r_f represents the As(III) sorption to the granular media, which is assumed to reach Langmuir equilibrium in the system (Lu et al., 2022). This term is represented by Eqn. (3):

$$r_f = 1 + \frac{\rho_d q_{max,d} K_{L,d} \overline{C_{As}}}{\theta_d (1 + K_{L,d} \overline{C_{As}})^2} \quad (3)$$

Parameters ρ_d [kg/m^3] and θ_d in Eqn. (3) are known for the wetland system (Valles-Aragón, 2013), and $K_{L,d}$ [m^3/mg] and $q_{max,d}$ [mg/kg] are fitted. In Eqn. (3), $\overline{C_{As}}$ is calculated as an average As(III) concentration [$\mu\text{g/L}$] based on Llorens et al. (2013).

Table 2. List of parameters used in this work.

SYMBOL	DESCRIPTION	UNITS
$C_{0,As}$	Initial As(III) concentration, as $H_3AsO_{3(aq)}$.	$\mu\text{g/L}$
C_{O_2}	Average molar concentration of dissolved oxygen, as $O_{2(aq)}$.	mol/L
C_{H^+}	Average molar concentration of protons, as $H^+_{(aq)}$: $C_{H^+} = 10^{-pH}$.	mol/L
D_x	Longitudinal dispersion coefficient of $H_3AsO_{3(aq)}$.	m^2/h
$k_{a,c}$	Adsorption rate constant for As(III) species onto $Fe(OH)_{3(s)}$.	$1/\text{h}$
k_m	Precipitation rate constant of the mineral m .	$\mu\text{g}/(\text{L h})$
$K_{L,c}$	Langmuir equilibrium adsorption constant for $Fe(OH)_{3(s)}$.	m^3/mg
$K_{L,d}$	Langmuir equilibrium adsorption constant for the granular media.	m^3/mg
$K_{sp,m}$	Solubility product constant for the mineral m .	-
$q_{max,c}$	Langmuir maximum adsorption capacity of $Fe(OH)_{3(s)}$.	mg/kg
$q_{max,d}$	Langmuir maximum adsorption capacity of the granular media.	mg/kg
v_x	Horizontal flow velocity.	m/h
X	$Fe(OH)_{3(s)}$ average concentration.	kg/m^3
ρ_d	Density of the saturated granular media.	kg/m^3
θ_d	Porosity of the saturated granular media.	m^3/m^3

2.1.2 Precipitation of minerals

Three minerals of As(III) are able to precipitate in the presence of Fe (Henke & Hutchison, 2009). Precipitation involves nucleation and growth of the mineral; as such, it is considered that precipitated minerals appear in its amorphous form. The minerals are $AsFeS_{(am)}$, $As_2S_{3(am)}$, and $AsS_{(am)}$, which in their crystalline forms are known as arsenopyrite, orpiment and realgar, respectively. According to Marty et al. (2015), for each mineral m , the precipitation rate R_m [$\mu\text{g}/(\text{L h})$] can be expressed according to Eqn. (4).

$$R_m = k_m C_{O_2}^{n_m} C_{H^+}^{m_m} |1 - \Omega_m^{\theta_m}|^{\eta_m} \quad (4)$$

$$\Omega_m = \frac{IAP_m}{K_{sp,m}} \quad (5)$$

In Eqn. (5), Ω_m is the saturation ratio, and IAP_m is the ion activity product for the mineral m , considering the ideal solution ($\gamma_i = 1$). In Eqn. (4), n_m , m_m , θ_m , and η_m are empirical factors for each mineral m , and k_m are fitted parameters. Table 3 shows each mineral-associated dissolution reaction's IAP -which depends on As, Fe, dissolved oxygen (DO), and sulfate (SO_4^{2-}) molar concentration (C_{As} , $C_{Fe^{2+}}$, C_{O_2} and $C_{SO_4^{2-}}$ respectively, in mol/L), and pH- and its empirical factors n_m and m_m .

Table 3. As(III) minerals dissolution reactions and relevant parameters. All phases are (aq) unless specified.

MINERAL	DISSOLUTION REACTION	<i>IAP</i>	<i>n</i>	<i>m</i>	log K _{sp} (25 °C)	REFERENCE
FeAsS _(am)	FeAsS _(am) + 2.75 O ₂ + 1.5 H ₂ O _(l) ⇌ Fe ²⁺ + H ₃ AsO ₃ + SO ₄ ²⁻	$\frac{C_{Fe^{2+}}C_{As}C_{SO_4^{2-}}}{C_{O_2}^{2.75}}$	0	0	772.74	Walker et al. (2005)
As ₂ S _{3(am)}	As ₂ S _{3(am)} + 6 O ₂ + 6 H ₂ O _(l) ⇌ 2 H ₃ AsO ₃ + 3 SO ₄ ²⁻ + 6 H ⁺	$\frac{C_{As}^2C_{SO_4^{2-}}^3-C_{H^+}^6}{C_{O_2}^6}$	0.42	-1.26	367.65	Lengke & Tempel (2001)
AsS _(am)	AsS _(am) + 2.25 O ₂ + 2.25 H ₂ O _(l) ⇌ H ₃ AsO ₃ + SO ₄ ²⁻ + 2 H ⁺	$\frac{C_{As}C_{SO_4^{2-}}-C_{H^+}^2}{C_{O_2}^{2.25}}$	0.92	-1.09	143.20	Lengke & Tempel (2003)

Thermodynamical data analysis indicates that for every studied mineral, the dissolution equilibrium constant K_{sp} has a very high value (Table 3), meaning that precipitation has low tendency to occur. According to Marty et al. (2015), in this scenario, the process is always far from thermodynamic equilibrium, and the saturation ratio tends to 0 (the free enthalpy of reaction tends to $-\infty$). For Eqn. (4), the precipitation kinetics no longer depend on the saturation ratio, and parameters θ_m and η_m are unnecessary since Eqn. (4) is simplified to Eqn. (6):

$$R_m = k_m C_{O_2}^{n_m} C_{H^+}^{m_m} \quad (6)$$

This also implies that *IAP* variations due to changes in concentration of As, Fe, DO, and pH do not affect precipitation rate, and low variability of kinetic rate is expected. Furthermore, it is possible that due to other predominant reactive phenomena, these rate terms and their parameters could lack importance and thus be neglected, meaning that probably none of these minerals would precipitate in the system.

2.1.2 Coprecipitation with iron (oxy)hydroxides

Coprecipitation of As(III) with iron (oxy)hydroxides consists of As(III) sorption onto these (oxy)hydroxides (sorbent) sites at the same time as they are being formed. This is modeled using a Langmuir kinetics approach (Liu & Shen, 2008). Eqn. (7) represents this phenomenon, where θ_c is the proportion of the Fe(OH)_{3(s)} surface occupied by As(III) species:

$$\frac{\partial \theta_c}{\partial t} = k_{a,c} q_{max,c} X \theta_c^2 - \left(k_{a,c} C_{0,As} + k_{a,c} q_{max,c} X + \frac{k_{a,c}}{K_{L,c}} \right) \theta_c + k_{a,c} C_{0,As} \quad (7)$$

$$\theta_c = \frac{C_{0,As} - C_{As}}{q_{max,c} X} \quad (8)$$

It is worth noting from Eqn. (8) the state variable C_{As} [$\mu\text{g/L}$] is indirectly included in θ_c and Eqn. (7) can be also expressed in terms of C_{As} . For Eqn. (7), X is an average $\text{Fe}(\text{OH})_{3(s)}$ concentration [kg/m^3], and $C_{0,As}$ is a known initial value of the state variable ($100 \mu\text{g/L}$, Valles-Aragón, 2013). Parameters $k_{a,c}$ [$1/\text{h}$], $K_{L,c}$ [m^3/mg] and $q_{max,c}$ [mg/kg] are fitted.

2.2 Numerical model solving

The model is solved in the software MATLAB®. Numerical method for the model implementation is a finite difference method implicit in dispersion and explicit in advection, which is derived in Eqn. (9).

$$r_f \frac{C_i^{j+1} - C_i^j}{\Delta t} = -v_x \frac{C_i^j - C_i^{j-1}}{\Delta x} + D_x \frac{C_{i+1}^{j+1} - 2C_i^{j+1} + C_{i-1}^{j+1}}{(\Delta x)^2} - \alpha' (C_i^{j+1})^2 - \beta' C_i^{j+1} - \gamma' \quad (9)$$

where C_i^j is the As concentration [$\mu\text{g/L}$] in the solution, at the corresponding j time [h] and i position [m], Δt is the time step, and Δx is the position step.

In Eqn. (9), α' , β' and γ' are constant parameters determined from the model's expressions presented in the previous section.

To linearize the model in Eqn. (9), a first-order Taylor series centered in the average As(III) concentration is used, as it is shown in Eqn. (10):

$$(C_i^{j+1})^2 \approx \overline{C_{As}}^2 + 2C_{0,As}(C_i^{j+1} - C_{0,As}) \quad (10)$$

and when replacing this expression in Eqn. (9) it takes the form of Eqn. (11):

$$\alpha' (C_i^{j+1})^2 + \beta' C_i^{j+1} + \gamma' \approx (2\alpha' \overline{C_{As}} + \beta') C_i^{j+1} + \gamma' - \overline{C_{As}}^2 \quad (11)$$

Then, with the redefining parameters $\alpha = 2\alpha' \overline{C_{As}} + \beta'$ and $\beta = \gamma' - \overline{C_{As}}^2$, Eqn. (12) can be obtained:

$$\alpha' (C_i^{j+1})^2 + \beta' C_i^{j+1} + \gamma' \approx \alpha C_i^{j+1} + \beta \quad (12)$$

When replacing it in the original transport equation, Eqn. (13) is obtained:

$$r_f \frac{C_i^{j+1} - C_i^j}{\Delta t} = -v_x \frac{C_i^j - C_i^{j-1}}{\Delta x} + D_x \frac{C_{i+1}^{j+1} - 2C_i^{j+1} + C_{i-1}^{j+1}}{(\Delta x)^2} - \alpha C_i^{j+1} + \beta \quad (13)$$

The following constants are defined: $\nu = \frac{v_x \Delta t}{r_f \Delta x}$, $\xi = \frac{D_x \Delta t}{r_f (\Delta x)^2}$, $\chi_1 = \frac{\alpha \Delta t}{r_f}$ and $\chi_2 = \frac{\beta \Delta t}{r_f}$. Finally, the numerical equation to solve is Eqn. (14):

$$-\xi C_{i+1}^{j+1} + (1 + 2\xi + \chi_1) C_i^{j+1} - \xi C_{i-1}^{j+1} = \nu C_i^{j-1} + (1 - \nu) C_i^j - \chi_2 \quad (14)$$

2.3 Model validation

The model was validated using data from a 336-day experiment in Chihuahua, Mexico (Valles-Aragón, 2013). In the experiment, the researchers disposed of three horizontal subsurface flow constructed wetland cells measuring 1.5 x 0.5 m length-width were disposed in parallel. Two of them were planted with *Eleocharis macrostachya* and the third remained unplanted as a control cell (Olmos-Márquez et al., 2012; Llorens et al., 2013; Valles-Aragón et al., 2017). The system operated with horizontal flow feeding of synthetic water prepared with well water and sodium arsenite (NaAsO₂) with a theoretical hydraulic retention time of 2 days and a water depth of 0.30 m (Valles-Aragón et al., 2017). The granular media of the control wetland was silty sand with a density of 1.4 g/cm³, porosity of 38% and which was composed of 89% quartz (SiO₂) and 11% feldspars: 9% k-feldspar (SiO₂), 1% muscovite (K(AlSi₃)O₈) and 1% montmorillonite-mg ((Al, Mg)₂Si₄O₁₀(OH)₂) (Llorens et al., 2013). The cells were filled to a height of 0.35 m.

Data collected from the unplanted cells were used for validation since the simulation of planted cells would require adding reactive terms to the transport equation related to biological and biochemical phenomena associated with the presence of plants. Also, a 200-hour experimental period was selected for validation since, during this period, arsenic inflow concentration remained practically constant at around 100 µg/L with slight variation (less than 5%).

According to Valles-Aragón (2013), for the control wetland cell, the flow rate (Q) is 5.7 L/d and longitudinal dispersivity (α_x) is 0.14 m. During the experiments, dissolved oxygen and pH exhibited 0-10 mg/L and 7.9-8.3 variations, respectively. Dissolved oxygen and pH tend to remain around 5 mg/L and 8.0, respectively. As for Fe(OH)_{3(s)} concentration, this was not measured by Valles-Aragón (2013). However, Llorens et al. (2013) indicated that for a total Fe concentration of 0.085 mg/L at the inlet, the system reaches 0.015 mg/L of Fe at the outlet. Assuming that total Fe is Fe(III) due to oxic environmental conditions that promote Fe(II) oxidation to Fe(III) and that Fe(III) precipitates as Fe(OH)_{3(s)} due to its low K_{sp} value (10⁻³⁸) reported by Snoeyink & Jenkins (1991), the value of X can be estimated. To summarize, Table 4 shows the known values used for relevant parameters of the model.

Table 4. Selected values used for associated parameters.

SYMBOL	VALUE	UNITS	REFERENCE
$C_{0,As}$	100	$\mu\text{g/L}$	Valles-Aragón (2013)
$\bar{C}_{As}$	22.5	$\mu\text{g/L}$	Llorens et al. (2013)
C_{O_2}	5	mol/L	Valles-Aragón (2013)
C_{H^+}	$10^{-8.0}$	mol/L	Valles-Aragón (2013)
D_x	0.012	m^2/h	Valles-Aragón (2013)
v_x	0.0858	m/h	Valles-Aragón (2013)
X	$7.5 \cdot 10^{-6}$	kg/m^3	Llorens et al. (2013)
ρ_d	1400	kg/m^3	Valles-Aragón et al. (2017)
θ_d	0.38	m^3/m^3	Valles-Aragón et al. (2017)

The parameters to be fit in this model are: $K_{L,d}$, $q_{max,d}$, $k_{FeAsS(am)}$, $k_{As_2S_3(am)}$, $k_{AsS(am)}$, $k_{a,c}$, $K_{L,c}$ and $q_{max,c}$. The parameter fitting process is performed using a Levenberg-Marquardt nonlinear least squares algorithm implemented in MATLAB®.

3. RESULTS AND DISCUSSION

Measured As(III) concentrations at the outlet of the control wetland cell were used to validate the model. Simulation results are shown in Figure 1.

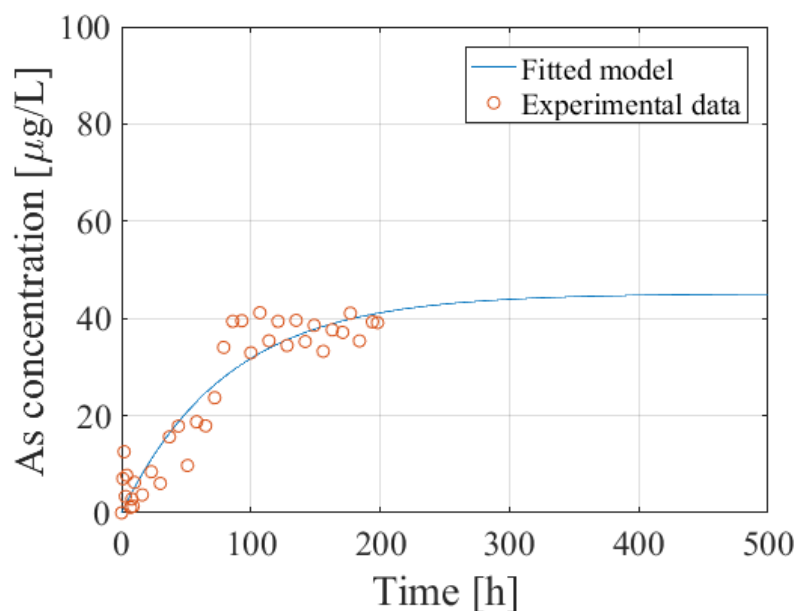


Figure 1. Simulation of the As(III) concentration at the outlet of the control wetland and the corresponding measurements.

The approximation of the model was used to validate experimental results. The fitted model, compared to experimental data, has a root mean squared error (RMSE) equal to $17.325 \mu\text{g/L}$ and an average value for residuals equal to $13.7511 \mu\text{g/L}$, which, in contrast to experimental data, verifies the goodness of fit, as it is shown in Figure 1. Table 5 shows the fitted values for selected parameters.

Table 5. Fitted model parameters and statistical validation.

SYMBOL	VALUE	CONFIDENCE INTERVAL	UNITS	SIGNIFICANCE
$K_{L,d}$	$1.195 \cdot 10^{-4}$	$[7.157 \cdot 10^{-4}; 7.465 \cdot 10^{-4}]$	m^3/mg	Yes
$q_{max,d}$	1.687	[1.636; 1.738]	mg/kg	Yes
$k_{FeAsS(am)}$	$7.244 \cdot 10^{-11}$	$[7.244 \cdot 10^{-11}; 7.244 \cdot 10^{-11}]$	$\mu\text{g}/(\text{L h})$	No
$k_{As_2S_3(am)}$	$2.239 \cdot 10^{-14}$	$[2.239 \cdot 10^{-14}; 2.239 \cdot 10^{-14}]$	$\mu\text{g}/(\text{L h})$	No
$k_{AsS(am)}$	$1.698 \cdot 10^{-17}$	$[1.698 \cdot 10^{-17}; 1.698 \cdot 10^{-17}]$	$\mu\text{g}/(\text{L h})$	No
$k_{a,c}$	0.0291	[0.0165; 0.0417]	1/h	Yes
$K_{L,c}$	$7.311 \cdot 10^{-11}$	$[7.069 \cdot 10^{-4}; 7.552 \cdot 10^{-4}]$	m^3/mg	Yes
$q_{max,c}$	1.455	[1.647 ; 1.727]	mg/kg	Yes

In Table 5, statistical significance is presented for each fitted parameter. A parameter is significant if its fitted value has a real impact on the final model results, and it is unlikely that such a fitted value is randomly obtained. As was expected and stated in the previous section, parameters associated with mineral precipitation were not statistically significant; thus they are not sensitive to results. Furthermore, their values are low compared to the other parameters in reaction rates, with a high difference in orders of magnitude, indicating that these can be neglected from the model.

The As(III) concentration curve for the outlet of the system is well explained by a Langmuir equilibrium and kinetic behavior -based on the obtained curve for As(III) concentration- via sorption to the granular media and coprecipitation with other species in this case, $\text{Fe}(\text{OH})_{3(s)}$. Parameters associated with such behavior were fitted and statistically significant.

4. CONCLUSIONS

The model was successfully validated using the experimental data in the first approach presented here. In the case of As minerals precipitation, they probably do not take place in the control cell due to their high K_{sp} values for their dissolution reactions, and this is consistent with the results, which showed that associated kinetic parameters are not significant.

The model is being improved in ongoing work by considering new state variables (C_{O_2} , C_{H^+} , X and C_{As} in the r_f factor) instead of using constant average values. This will be included

using additional reactive transport equations for each of them coupled with the main As(III) transport equation. Non-linear terms should be approximated to their linear forms using a first-order Taylor series. Thus, the central value for each approximation must be well-calibrated via Monte Carlo simulations. Future versions of the model will also include biological and biochemical phenomena to elucidate the behavior of planted wetlands.

ACKNOWLEDGEMENTS

We acknowledge the Department of Civil Engineering, the Graduate School at the Faculty of Physical and Mathematical Sciences, Universidad de Chile and ANID-Subdirección de Capital Humano/Doctorado Nacional/2023-21232156 for funding Diego Bravo-Riquelme Ph.D. studies.

REFERENCES

- Bravo-Riquelme, D., & Lizama-Allende, K. (2024). "Mathematical modeling of subsurface flow constructed wetlands performance for arsenic removal: Review and perspectives". *Science of The Total Environment*, 175061.
- Henke, K.R., 2009. Waste treatment and remediation technologies for arsenic. In: Henke, K.R. (Ed.), *Arsenic Environmental Chemistry, Health Threats and Waste Treatment*. John Wiley & Sons Ltd, Chichester, UK, pp. 351–430.
- Henke, K.R., Hutchison, A., 2009. Arsenic chemistry. In: Henke, K.R. (Ed.), *Arsenic Environmental Chemistry, Health Threats and Waste Treatment*. John Wiley & Sons Ltd, Chichester, UK, p. 40.
- IPCS, 2001. *Arsenic and Arsenic Compounds*. World Health Organisation, International Programme on Chemical Safety (Environmental Health Criteria 224), Geneva.
- Jain, C. K., & Singh, R. D. (2012). "Technological options for the removal of arsenic with special reference to South East Asia". *Journal of Environmental Management*, 107, 1-18.
- Lengke, M. F., & Tempel, R. N. (2001). "Kinetic rates of amorphous As_2S_3 oxidation at 25 to 40 °C and initial pH of 7.3 to 9.4". *Geochimica et Cosmochimica Acta*, 65(14), 2241-2255.
- Lengke, M. F., & Tempel, R. N. (2003). "Natural realgar and amorphous AsS oxidation kinetics". *Geochimica et Cosmochimica Acta*, 67(5), 859-871.
- Llorens, E., Obradors, J., & Alarcón-Herrera, M. T. (2013). "Modelling the non-biogenic steps of arsenic retention in horizontal subsurface flow constructed wetlands". *Chemical Engineering Journal*, 223, 657-664.
- Lu, S., Yang, Y., Su, X., Yu, K., & Wang, X. (2022). "Arsenic adsorption and desorption in various aqueous media in the nearshore zone and influencing factors". *Sustainability*, 14(17), 10935.

- Marty, N. C., Claret, F., Lassin, A., Tremosa, J., Blanc, P., Madé, B., ... & Tournassat, C. (2015). "A database of dissolution and precipitation rates for clay-rocks minerals". *Applied Geochemistry*, 55, 108-118.
- Olmos-Márquez, M. A., Alarcón-Herrera, M. T., & Martín-Domínguez, I. R. (2012). "Performance of *Eleocharis macrostachya* and its importance for arsenic retention in constructed wetlands". *Environmental Science and Pollution Research*, 19, 763-771.
- Raju, N. J. (2022). "Arsenic in the geo-environment: A review of sources, geochemical processes, toxicity and removal technologies". *Environmental Research*, 203, 111782.
- Saeed, T., & Sun, G. (2011). "Kinetic modelling of nitrogen and organics removal in vertical and horizontal flow wetlands". *Water Research*, 45(10), 3137-3152.
- Snoeyink, V. L., & Jenkins, D. (1991). *Water Chemistry*. John Wiley & Sons.
- Valles-Aragón, M. C. (2013). *Modelación de Procesos de Remoción de Arsénico en Agua con Humedales Construidos*. Tesis para obtener el Grado de Doctor en Ciencia de Materiales, Departamento de Estudios de Posgrado, Centro de Investigación en Materiales Avanzados.
- Valles-Aragón, M. C., Alarcón-Herrera, M. T., Llorens, E., Obradors-Prats, J., & Leyva, A. (2017). "Simulation of arsenic retention in constructed wetlands". *Environmental Science and Pollution Research*, 24, 2394-2401.
- Walker, F. P., Schreiber, M. E., & Rimstidt, J. D. (2006). "Kinetics of arsenopyrite oxidative dissolution by oxygen". *Geochimica et Cosmochimica Acta*, 70(7), 1668-1676.
- Wang, Y., Zhang, L., Guo, C., Gao, Y., Pan, S., Liu, Y., ... & Wang, Y. (2022). "Arsenic removal performance and mechanism from water on iron hydroxide nanopetalines". *Scientific Reports*, 12(1), 17264.

ABOUT THE AUTHORS

Diego Bravo-Riquelme is a Chemical Engineer from Universidad de Chile. He is a Ph.D. student in Civil Engineering at Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile. His research areas are mathematical modeling of chemical processes, water quality, and treatment systems.

Katherine Lizama-Allende is a Civil Engineer with a Master of Science from Pontificia Universidad Católica de Chile, and a Ph.D. in Civil Engineering from Monash University. She is an Assistant Professor at Universidad de Chile. Her research areas are water quality and control and sustainable treatment systems such as constructed wetlands.

Yarko Niño is a Civil Engineer from Universidad de Chile with a Master of Science in Civil Engineering, and a Ph.D. in Civil Engineering from the University of Illinois at Urbana-Champaign. He is a Full Professor at Universidad de Chile. His research areas are hydrodynamics, environmental flows, sediment transport, and numerical modeling.

CELERIDAD DE LA PERTURBACIÓN DEL FONDO GENERADA POR EL FLUJO LAMINAR DE UN FLUIDO TIPO LEY DE POTENCIA SOBRE UN LECHO NO-COHESIVO: ENFOQUE LINEAL

RODRIGO GONZÁLEZ¹, ALDO TAMBURRINO²

¹Alumno del Programa de Doctorado en Ciencias de la Ingeniería mención Fluidodinámica, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile

rodrigojgonzalezh@hotmail.com

ORCID: 0000-0002-0253-2129

²Departamento de Ingeniería Civil Engineering y Advanced Mining Technology Center, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile

atamburr@ing.uchile.cl

ORCID: 0000-0001-5406-370X

RESUMEN

Se determina la celeridad de las perturbaciones (ondas) superficiales y del fondo generadas por el flujo laminar de un fluido tipo ley de potencia sobre un lecho granular no cohesivo. El enfoque del estudio es analítico, apoyado en relaciones empíricas para el esfuerzo de corte crítico y gasto sólido de fondo para fluidos no newtonianos.

Palabras claves: Formas de fondo, celeridad, ondas superficiales, fluidos ley de potencia, método lineal, flujo laminar

1. INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

La mezcla de partículas finas con agua da origen a una mezcla que, dependiendo de la concentración y constitución mineralógica los sólidos, puede tratarse como un fluido equivalente, con un comportamiento no-newtoniano. Este es el caso, por ejemplo, de los flujos de barro que se encuentran en la naturaleza y, en el ámbito de la industria minera, de los flujos de concentrados y de relaves. Estos flujos son altamente viscosos y, aunque pueden lograr altas velocidades, muchas veces el régimen de flujo es laminar. Si esta mezcla se mueve sobre un lecho erosionable, es posible que se produzca un arrastre del material del lecho, dando origen a formas de fondo. El objetivo de este artículo es determinar la celeridad de las formas de fondo que se generan en un flujo 1D. En su mayor parte, el análisis es general y solo al final se impone que el fluido tiene un comportamiento reológico tipo ley de potencia.

2. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

El problema en estudio contempla la interacción entre el flujo de fluido y el lecho deformable. Como se tiene dos medios que están interactuando, se requieren las ecuaciones que representan el comportamiento e interacciones entre estos. Para el flujo con superficie libre,

las ecuaciones son las de continuidad y momentum en una dimensión, determinadas por Barré de Saint-Venant (1871). Estas ecuaciones pueden extenderse a dos dimensiones y corresponden a una condición de aguas someras, es decir en las que la altura del flujo es mucho menor que la escala asociada a la longitud en la que se desarrolla. La variación del lecho está dada por la ecuación de Exner (1925), la cual se obtiene de realizar el balance de masa de partículas de sedimentos en el lecho por efecto del flujo que escurre sobre este. Esta ecuación requiere conocer el gasto sólido de fondo, es decir, el flujo de masa de partículas de sedimentos sobre el lecho.

2.1 Deformación del lecho como un problema de estabilidad

Debido a la interacción del lecho con el flujo, la interfaz entre el lecho y el fluido se puede volver inestable. Debido a esta inestabilidad se pueden tener diferentes formas de fondo las cuales se encuentran ligadas a las características del flujo (Vanoni & Brooks, 1957; Gradowczyk, 1968). Varios estudios indican que la generación de las formas de fondo, como ondas sedimentarias, son producidas por la inestabilidad de la interfaz entre el fluido y el lecho (Grass, 1970; Williams & Kemp, 1971), lo que provoca pequeñas ondas sedimentarias, las cuales llevan a la generación de las formas de fondo, por ende es relevante el estudio del problema como un análisis de estabilidad para determinar cuándo se generan las formas de fondo, como el realizado por Kennedy (1963) con flujo potencial y una perturbación sinusoidal sobre el lecho, para determinar las posibles formas de fondo. Callander (1968) y Gradowczyk (1968) determinan la celeridad de ondas para el lecho, analizando la estabilidad de estas a partir de los parámetros que afectan la celeridad. Aziz & Prasad (1985) empleando soluciones de onda como los autores anteriores, determina una relación de estabilidad a partir de los parámetros involucrados en la interacción entre el fluido y el lecho.

Existen múltiples estudios que documentan las formas de fondo que se observan debido a la deformación del lecho indicando las características asociadas del flujo que se tiene sobre este para flujos turbulentos newtonianos. Kennedy (1963) considerando flujo potencial y el método de perturbaciones pequeñas determina relaciones entre parámetros del flujo y del lecho para las distintas formas de fondo que se generan. Vanoni (1974) compila resultados experimentales sobre la dinámica de los ríos, donde se presentan las formas de fondo posibles, cuándo estas se producen y cómo se forman, además de cuándo se inicia el proceso del transporte de sedimentos. Andreotti et al. (2012) realizan un trabajo similar, presentando resultados sobre las posibles formas de fondo en flujos turbulentos, qué condiciones deben existir para que estas se den, observando diferencias con las predicciones hechas con modelos que suponen un fluido ideal.

Para el caso de fluidos con reologías no newtonianas, existen pocos estudios, siendo relevante el de Wan & Song (1987), donde se corrobora la aparición de las mismas formas de fondo que para el caso de fluidos newtonianos.

2.2 Celeridad de las formas de fondo y su relación con el gasto sólido

La generación de formas de fondo, por efecto de la interacción del fluido con el lecho, provoca la aparición de una resistencia adicional (Einstein, 1950), por lo que múltiples

autores se han enfocado en analizar la aparición de las formas de fondo y las expresiones para determinar cuánto gasto sólido en el fondo se provoca por efecto del flujo de fluido que se produce sobre éste, además de cuando se inicia el proceso de arrastre en el lecho.

Para flujos turbulentos de fluidos newtonianos, múltiples autores han presentado expresiones matemáticas para representar el gasto sólido en el lecho. DuBuat (1786) es uno de los primeros en discutir sobre la importancia del esfuerzo sobre el lecho, además de dar algunas nociones sobre la estabilidad de las formas de fondo. Dubois (1879) presenta una de las primeras relaciones para determinar el transporte de fondo, considerando una fuerza por efecto del fluido y un valor umbral para el inicio del movimiento. Posteriormente Schoklitsch (1914) realiza experimentos, haciendo aportes a la relación para determinar el gasto de fondo planteada por Dubois. De igual manera Gilbert (1914) realiza amplios experimentos en lo que respecta a la medición gasto sólido.

Bagnold (1973), empleando principios físicos, deduce una relación general para calcular el transporte en el fondo. Otros estudios presentan relaciones semi-empíricas como las de Einstein (1942), Meyer-Peter & Muller (1948), Ashida & Michiue (1972), Engelund & Fredsøe (1976), Fernandez Luque & van Beek, (1976) y van Rijn (1984). Las relaciones planteadas por los autores anteriores muestran una dependencia con el esfuerzo de corte que ejerce el fluido sobre el lecho, pero además agregan un esfuerzo crítico para representar el umbral para el cual se inicial el arrastre en el lecho. Entre los estudios sobre el esfuerzo de corte crítico para el cual se tiene gasto sólido destaca el de Shields (1936), y los posteriores trabajos sobre los resultados presentados por este, realizados por Rouse (1939) y Brownlie (1981), donde se muestra que el valor umbral para el inicio del arrastre incipiente depende de las características del lecho.

Es relevante también el estudio probabilístico de Einstein (1950), ya que analiza el gasto sólido en el fondo como el que se encuentra en suspensión, sin seguir las hipótesis del comportamiento del esfuerzo crítico empleadas por Bagnold, para el gasto de fondo. Las relaciones de Meyer-Peter & Müller (1948) y Einstein (1950), son las más populares y muestran resultados similares a los datos experimentales obtenidos por Gilbert (1914) y Chien (1954), sin embargo, Engelund & Hansen (1972) indican que estas relaciones presentan gran diferencia con los datos experimentales para valores de gasto sólido grandes.

Parker et al. (2003) desarrolla un modelo distinto para determinar el gasto sólido de fondo, llegando a una expresión similar a la de Bagnold pero sin emplear las hipótesis que este plantea. Niño & García (1998), indican que la hipótesis empleada por Bagnold falla al no representar de manera correcta como actúa el esfuerzo de corte sobre las capas en el lecho.

En el marco de fluidos newtonianos en régimen laminar, Valance y Langlois (2005), observaron que el gasto sólido no solo puede depender del esfuerzo de corte sobre el lecho, sino que también de un esfuerzo de corte crítico, similar a lo que ocurre en el régimen turbulento.

2.3 Verificación experimental

Existe una gran cantidad de publicaciones relativas a la deformación del lecho y la celeridad de las ondas sedimentarias para el caso newtoniano, pero existen deficiencias en lo que respecta al fenómeno del arrastre en el lecho, lo que se traduce en que expresiones para el gasto sólido no se corroboran con resultados experimentales (Charru et al, 2004). Además, no se ha logrado acoplar de manera adecuada el lecho con el flujo para el caso laminar (Ouriemi et al. 2009). Es así que existen limitaciones en los resultados que se pueden tener en un enfoque netamente teórico para un estudio de las ondas, aun empleando relaciones semi-analíticas.

En el caso de analizar otras reologías que no sean newtonianas, existen muy poca literatura sobre el comportamiento de las ondas para estas reologías. Uno de los pocos estudios en este sentido es el de Negrete (2014), en el que se considera el arrastre en el lecho a partir de mediciones de la celeridad de las ondas sedimentarias.

3. DESARROLLO DE LAS ECUACIONES PARA LA CELERIDAD DE LAS FORMAS DE FONDO EN FLUJOS DE FLUIDOS TIPO LEY DE POTENCIA

3.1 Ecuaciones fundamentales

Para un flujo bidimensional en un canal con superficie libre con altura $h(x, t)$ y velocidad media $u(x, t)$, con una cota del lecho $\eta(x, t)$, con el flujo en la dirección del eje x , pudiendo producir transporte de sedimentos en la misma dirección, se tiene un sistema de ecuaciones en derivadas parciales formado por las siguientes ecuaciones:

Ecuación de continuidad del fluido:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

Ecuación de momentum del fluido (ecuación de Saint-Venant en una dimensión):

$$\frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(\beta u^2 h)}{\partial x} = -gh \frac{\partial(h + \eta)}{\partial x} - \frac{\tau}{\rho} \quad (2)$$

Donde β es el coeficiente de Boussinesq, ρ la densidad del fluido y τ es el esfuerzo de corte sobre el lecho, el cual es una función de la velocidad $u(x, t)$ y la altura $h(x, t)$ y depende de la reología del fluido, $\eta(x, t)$ corresponde a la cota del lecho.

Ecuación de continuidad del sedimento (ecuación de Exner sin depositación ni resuspensión)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{1 - \lambda_p} \frac{\partial q_s(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

Donde $q_s(x, t)$ es el gasto sólido por unidad de ancho y λ_p es la porosidad del lecho, la cual se supone constante.

Llamando al término $q_s(x, t)/(1 - \lambda_p) = g_s(x, t)$, la ecuación de Exner se reduce a:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial g_s(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

3.2 Ecuaciones y parámetros adimensionales asociados

Definiendo la escala asociada a la vertical a la altura del flujo H , a la velocidad U , al esfuerzo de corte S y al gasto sólido G , además de las escalas asociadas a la variable espacial L y temporal como T , se forman las variables adimensionales identificadas con primas ($'$):

$$h = Hh'; u = Uu'; x = Lx'; t = Tt'; g_s = g'_s G; \frac{\tau}{\rho} = S \frac{\tau'}{\rho'} \quad (5)$$

La cota del fondo η , se escala con la escala de altura del flujo H :

$$\eta = H\eta' \quad (6)$$

Remplazando las definiciones (5) y (6) en el sistema de ecuaciones presentado en la sección 3.1, resulta:

Ecuación de continuidad del fluido:

$$\Pi_1 \frac{\partial h'}{\partial t'} + h' \frac{\partial u'}{\partial x'} + u' \frac{\partial h'}{\partial x'} = 0 \quad (7)$$

Ecuación de momentum:

$$\begin{aligned} \Pi_1 \mathbb{F}r^2 h' \frac{\partial u'}{\partial t'} + \Pi_1 \mathbb{F}r^2 u' \frac{\partial h'}{\partial t'} + \mathbb{F}r^2 2\beta u' h' \frac{\partial u'}{\partial x'} + (\mathbb{F}r^2 \beta u'^2 + h') \frac{\partial h'}{\partial x'} + h' \frac{\partial \eta'}{\partial x'} \\ = -\frac{f}{8} \frac{\mathbb{F}r^2 \tau'}{\mathbb{D} \rho'} \end{aligned} \quad (8)$$

Ecuación de Exner:

$$\Pi_1 \frac{\partial \eta'}{\partial t'} + \mathbb{M} g'_{su} \frac{\partial u'}{\partial x'} + \mathbb{M} g'_{sh} \frac{\partial h'}{\partial x'} = 0 \quad (9)$$

En las ecuaciones anteriores $\Pi_1 = L/(TU)$, $\mathbb{F}r^2 = U^2/(gH)$, $\mathbb{M} = G/(UH)$ es un parámetro que considera la razón del gasto sólido respecto al caudal líquido. $f = 8\tau/(\rho u^2)$ es el factor de fricción de Darcy, y $\mathbb{D} = H/L$ es la razón de aspecto de las escalas geométricas. Los términos g'_{su} y g'_{sh} están definidos como

$$g'_{su} = \frac{\partial g'_s}{\partial u'} \quad ; \quad g'_{sh} = \frac{\partial g'_s}{\partial h'} \quad (10)$$

3.3 Representación matricial y ecuación para la celeridad de las ondas que se generan

Definiendo las matrices A y B y los vectores $\vec{V}$ y $\vec{E}$ siguientes (Ecs. 11-12) se representa el sistema de ecuaciones (8), (9) y (10) de manera matricial:

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} u' \\ h' \\ \eta' \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} -\frac{f}{8} \frac{\text{Fr}^2}{\mathbb{D}} \frac{\tau'}{\rho'} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$A = \begin{pmatrix} \text{Fr}^2 2\beta u' h' & \text{Fr}^2 \beta u'^2 + h' & h' \\ h' & u' & 0 \\ \mathbb{M} g'_{su} & \mathbb{M} g'_{sh} & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$B = \begin{pmatrix} \Pi_1 \text{Fr}^2 h' & \Pi_1 \text{Fr}^2 u' & 0 \\ 0 & \Pi_1 & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

De este modo, el sistema de ecuaciones se representa como:

$$A \frac{\partial \vec{V}}{\partial x'} + B \frac{\partial \vec{V}}{\partial t'} = \vec{E} \quad (15)$$

Para obtener la celeridad de las ondas asociadas a cada variable del sistema de ecuaciones se emplea el método de los valores propios sobre una representación matricial del sistema de ecuaciones en derivadas parciales, método que emplean Gradowczyk (1967) para deducir las ondas a primer orden en un flujo turbulento sobre un lecho móvil y Chaudhry (1979) para determinar la celeridad de las ondas de presión en el flujo en una tubería elástica de un fluido compresible. Ambos autores consideran un fluido newtoniano. Para esto, se calculan los valores propios de la representación matricial como:

$$\det|A - sB| = 0 \quad (16)$$

Donde s es la celeridad adimensional de la onda asociada a cada variable del sistema. Como el sistema es de 3×3 , deben existir tres valores propios, donde cada uno es la celeridad de la perturbación respectiva a cada una de las variables. Desarrollando el determinante se obtiene un polinomio de orden tres para s :

$$0 = s^3 \Pi_1^3 \text{Fr}^2 - s^2 \Pi_1^2 \text{Fr}^2 2\beta u' - s \left(\mathbb{M} \Pi_1 g'_{su} + \Pi_1 (h' - \text{Fr}^2 \beta u'^2) \right) - \mathbb{M} (g'_{sh} h' - g'_{su} u') \quad (17)$$

Si bien la fórmula para la solución de una ecuación cúbica existe, debido a su complejidad, aplicarla directamente a este problema resulta complejo. Usando una aproximación por medio de una expansión en series es posible si se tienen las condiciones adecuadas.

3.4 Determinación de la celeridad de las ondas mediante una expansión a primer orden

Considerando el sentido físico del parámetro $\mathbb{M}$, resulta que en general es pequeño ya que, en general, el caudal de fluido es mucho mayor que el caudal de sedimento. De este modo, si $\mathbb{M} \ll 1$, es posible expandir la celeridad adimensional de las ondas en función de $\mathbb{M}$, siendo la expansión a primer orden de s

$$s = s_o + \mathbb{M}s_1 + \vartheta(\mathbb{M}^2) \quad (18)$$

de donde se obtiene:

$$s^2 = (s_o + \mathbb{M}s_1 + \vartheta(\mathbb{M}^2))^2 = s_o^2 + 2s_o s_1 \mathbb{M} + \vartheta(\mathbb{M}^2) \quad (19)$$

$$s^3 = (s_o + \mathbb{M}s_1 + \vartheta(\mathbb{M}^2))^3 = s_o^3 + 3s_o^2 s_1 \mathbb{M} + \vartheta(\mathbb{M}^2) \quad (20)$$

Reemplazando las expansiones anteriores en la Ec. 17 y agrupando términos según el orden de $\mathbb{M}$ resulta:

$$\begin{aligned} 0 = & [s_o^3 \Pi_1^3 \mathbb{F}r^2 - s_o^2 \Pi_1^2 \mathbb{F}r^2 2\beta u' - s_o \Pi_1 (h - \mathbb{F}r^2 \beta u'^2)] \\ & + \mathbb{M} [3s_o^2 s_1 \Pi_1^3 \mathbb{F}r^2 - 2s_o s_1 \Pi_1^2 \mathbb{F}r^2 2\beta u' - s_o \Pi_1 g'_{su} \\ & - s_1 \Pi_1 (h' - \mathbb{F}r^2 \beta u'^2) - (g'_{sh} h' - g'_{su} u')] + \vartheta(\mathbb{M}^2) \end{aligned} \quad (21)$$

3.4.1 Celeridad de orden cero

Como la Ec. 21 es igual a cero, para cada orden de $\mathbb{M}$ sus coeficientes también debe ser cero. Luego para orden cero:

$$0 = s_o^3 \Pi_1^3 \mathbb{F}r^2 - s_o^2 \Pi_1^2 \mathbb{F}r^2 2\beta u' - s_o \Pi_1 (h - \mathbb{F}r^2 \beta u'^2) \quad (22)$$

Las soluciones para esta ecuación cúbica son:

$$s_o^{(1,2)} = \beta \frac{u'}{\Pi_1} \pm \sqrt{(\beta^2 - \beta) \frac{u'^2}{\Pi_1^2} + \frac{h'}{\mathbb{F}r^2 \Pi_1^2}} \quad (23)$$

$$s_o^{(3)} = 0 \quad (24)$$

Remplazando las definiciones de Π_1 y $\mathbb{F}r^2$ en la Ec. (23) se obtienen las celeridades de orden cero con dimensiones $c_o^{(1,2)}$ y $c_o^{(3)}$:

$$c_o^{(1,2)} = \beta u \pm \sqrt{(\beta^2 - \beta)u^2 + gh} \quad (25)$$

$$c_o^{(3)} = 0 \quad (26)$$

La Ec. (25) corresponde al resultado clásico para la celeridad de una onda gravitacional superficial (ver, por ej., Tamburrino, 1987). Si se tiene una distribución uniforme de velocidad ($\beta = 1$), se obtiene la expresión clásica para el flujo turbulento en un canal (Chow, 1959):

$$c_o^{(1,2)} = u \pm \sqrt{gh} \quad (27)$$

Como la tercera celeridad para orden cero es nula, se tiene que la expansión a orden cero corresponde a la situación cuando el lecho no se ve afectado, es decir, no existe transporte de sólido de fondo.

3.4.2 Celeridad de orden uno

Los términos que acompañan a $\mathbb{M}$ en la Ec. 21 deben sumar cero, obteniéndose la solución para s_1 :

$$s_1 = \frac{(g'_{sh}h' - g'_{su}u') + s_o \Pi_1 g'_{su}}{3s_o^2 \Pi_1^3 \mathbb{F}r^2 - 4s_o \Pi_1^2 \mathbb{F}r^2 \beta u' - \Pi_1 (h' - \mathbb{F}r^2 \beta u'^2)} \quad (28)$$

Reemplazando el valor de s_o obtenido anteriormente en la Ec. 28 se determina la corrección de orden 1 para las celeridades. La celeridad de orden cero de la perturbación del lecho está dada por $s_o^{(3)} = 0$ por lo que al reemplazar en la Ec. 28, la celeridad de orden 1 resulta:

$$s_1^{(3)} = \frac{(g'_{su}u' - g'_{sh}h')}{\Pi_1 (h' - \mathbb{F}r^2 \beta u'^2)} \quad (29)$$

de donde se tiene que la celeridad de la perturbación del lecho es:

$$s^{(3)} = \frac{(g'_{su}u' - g'_{sh}h')}{\Pi_1 (h' - \mathbb{F}r^2 \beta u'^2)} \mathbb{M} + \mathcal{O}(\mathbb{M}^2) \quad (30)$$

por lo que la celeridad con dimensiones queda:

$$c^{(3)} = \frac{1}{h \left(1 - \beta \frac{u^2}{gh}\right)} \left(u \frac{\partial g_s}{\partial u} - h \frac{\partial g_s}{\partial h} \right) \quad (31)$$

En términos del gasto sólido q_s :

$$c^{(3)} = \frac{1}{(1 - \lambda_p)} \frac{1}{h \left(1 - \beta \frac{u^2}{gh}\right)} \left(u \frac{\partial q_s}{\partial u} - h \frac{\partial q_s}{\partial h} \right) \quad (32)$$

Los resultados hasta acá obtenidos son generales, ya que no se ha impuesto ninguna forma particular al gasto sólido q_s , ni se le ha dado un valor específico al coeficiente de Boussinesq, β .

3.4.3 Celeridad de la perturbación del lecho para un fluido tipo ley de potencia

Como se aprecia en la Ec. (32), la determinación de la celeridad requiere conocer la expresión para el gasto sólido. La única relación que los autores conocen deducida experimentalmente para un flujo de un fluido tipo ley de potencia es la obtenida por Vásquez (2020) en su memoria para obtener el título de ingeniera civil:

$$q_s^* = 0.15 \left(\frac{K^{\frac{2}{2-n}}}{(\rho_s - \rho) g \rho^{\frac{n}{2-n}} d_s^{\frac{2+n}{2-n}}} \right)^{0.75} (\tau_* - \tau_{*c})^{0.45} \quad (33)$$

donde q_s^* es el gasto sólido adimensional, τ_* el esfuerzo de corte de fondo adimensional de Shields ($\tau_* = \tau_0 / (\rho g R d_s)$, con R la densidad sumergida relativa del sedimento) y τ_{*c} el esfuerzo crítico de fondo adimensional. En la memoria de Vásquez (2020), el gasto sólido adimensional se define como

$$q_s^* = q_s \left(\frac{K}{(\rho_s - \rho) g d_s^{2n+1}} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (34)$$

siendo K el índice de consistencia, n el índice de flujo, ρ_s y d_s la densidad y el tamaño característico de las partículas, respectivamente. Si $n = 1$ y $K = \mu$ se recupera la expresión de Ouriemi et al. (2009), obtenida para flujos laminares de fluidos newtonianos.

Denominando $\mathbb{T}$ al coeficiente que involucra solo las características de del fluido, del sedimento y g :

$$\mathbb{T} = 0.15 \left(\frac{(\rho_s - \rho) g d_s^{2n+1}}{K} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{K^{\frac{2}{2-n}}}{(\rho_s - \rho) g \rho^{\frac{n}{2-n}} d_s^{\frac{2+n}{2-n}}} \right)^{0.75} \quad (35)$$

De este modo, el gasto sólido (con dimensiones) se expresa como:

$$q_s = \mathbb{T} (\tau_* - \tau_{*c})^{0.45} \quad (36)$$

La determinación del esfuerzo adimensional de Shields se hace a partir de la ley constitutiva para un fluido tipo ley de potencia:

$$\tau_{ij} = K (\Pi_{\dot{\gamma}})^{n-1} \dot{\gamma}_{ij} \quad (37)$$

donde K es el índice de consistencia, n el índice de flujo y $\Pi_{\dot{\gamma}}$ es el segundo invariante del tensor de tasa de deformación el que debido a su simetría se reduce a:

$$\Pi_{\dot{\gamma}} = \sqrt{\frac{1}{2} (\dot{\gamma}_{11}^2 + \dot{\gamma}_{22}^2 + \dot{\gamma}_{33}^2) + \dot{\gamma}_{12}^2 + \dot{\gamma}_{13}^2 + \dot{\gamma}_{23}^2} \quad (38)$$

Para un flujo bidimensional, uniforme o gradualmente variado en la dirección x , el segundo invariante se simplifica enormemente, quedando:

$$\Pi_{\dot{\gamma}} = \sqrt{\left(\frac{d\tilde{u}}{dy}\right)^2} = \left|\frac{d\tilde{u}}{dy}\right| \quad (39)$$

En la Ec. (39) se ha utilizado $\tilde{u}$ para denotar la velocidad instantánea local en la dirección x , $\tilde{u}(x, y, t)$. La velocidad promediada en la dirección y se denota u . De este modo, el esfuerzo de corte en la dirección longitudinal se reduce a

$$\tau_{xy} = K \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \quad (40)$$

La determinación del esfuerzo sobre el fondo, τ_o , se hace considerando que en el flujo gradualmente variado la distribución de velocidad es autosimilar, es decir (Tamburrino et al., 2016):

$$\frac{\tilde{u}(x, y, t)}{u(x, t)} = \mathcal{F}\left(\frac{y}{h(x, t)}\right) \quad (41)$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{y}{h(x, t)}\right) = \frac{2n+1}{n+1} \left[1 - \left(1 - \frac{y}{h(x, t)}\right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (42)$$

A partir de lo cual se obtiene el esfuerzo de corte sobre el fondo:

$$\tau_o = K \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{u^n}{h^n} \quad (43)$$

resultando la siguiente expresión para el gasto sólido

$$q_s = \mathbb{T} \left(\frac{K}{\rho g R d_s} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{u^n}{h^n} - \frac{u}{h} \tau_{*c} \right) \quad (44)$$

No debe olvidarse que la condición base del flujo es la de un lecho sin presencia de formas de fondo, y dado que las perturbaciones son pequeñas es posible utilizar la expresión para el esfuerzo de corte dada por la Ec. (43), así como la del esfuerzo de corte crítico que se presenta a continuación.

Para la determinación del esfuerzo de corte crítico se considera una relación tipo Mantz (1977), considerando un número de Reynolds de la partícula en un flujo de un fluido tipo ley de potencia (Tamburrino et al., 2016):

$$\tau_{*c} = \varepsilon \mathbb{Re}_{*p}^{-\delta} \quad (45)$$

donde $\mathbb{Re}_{*p}$ es un número de Reynolds de la partícula modificado según la Ec. (46). ε y δ son parámetros experimentales. Para flujos de fluidos newtonianos Mantz (1977) determinó experimentalmente $\varepsilon = 0,1$ y $\delta = 0,3$. En experimentos con fluidos tipo ley de potencia, Tamburrino et al. (2016) obtuvieron $\varepsilon = 0,1$ y $\delta = 0,2$.

$$\mathbb{Re}_{*p} = \frac{\rho u_*^{2-n} d_s^n}{K} \quad (46)$$

Considerando el esfuerzo de corte sobre el fondo dado por la Ec. (43), la velocidad friccional u_* es

$$u_* = \sqrt{\frac{K}{\rho} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{u^n}{h^n}} \quad (47)$$

Usando esta expresión para la velocidad friccional en la Ec. (46), $\mathbb{Re}_{*p}$ queda:

$$\mathbb{Re}_{*p} = \left(\frac{2n+1}{n} \right)^{\frac{n(2-n)}{2}} \left(\frac{\rho}{K} \right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{u}{h} \right)^{\frac{n(2-n)}{2}} d_s^n \quad (48)$$

Definiendo

$$\xi \equiv \varepsilon \left[\left(\frac{2n+1}{n} \right)^{\frac{n(2-n)}{2}} \left(\frac{\rho}{K} \right)^{\frac{n}{2}} d_s^n \right]^{-\delta} \quad (49)$$

$$\sigma \equiv \frac{n(2-n)}{2} \quad (50)$$

el esfuerzo de corte crítico adimensional se expresa como

$$\tau_{*c} = \xi \left(\frac{h}{u} \right)^\sigma \quad (51)$$

De este modo, las derivadas del gasto sólido respecto a u (q_{su}) y h (q_{sh}) son:

$$q_{su} = 0.45 \mathbb{T} \left(\frac{K}{\rho g R d_s} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{u^n}{h^n} - \xi \left(\frac{h}{u} \right)^\sigma \right)^{-0.55} \times \left(\frac{Kn}{\rho g R d_s} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{u^{n-1}}{h^n} + \xi \sigma \frac{h^\sigma}{u^{\sigma+1}} \right) \quad (52)$$

$$q_{sh} = -0.45 \mathbb{T} \left(\frac{K}{\rho g R d_s} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{u^n}{h^n} - \xi \left(\frac{h}{u} \right)^\sigma \right)^{-0.55} \times \left(\frac{Kn}{\rho g R d_s} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \frac{u^n}{h^{n+1}} + \xi \sigma \frac{h^{\sigma-1}}{u^\sigma} \right) \quad (53)$$

Multiplicando las Ecs. (52) y (53) respectivamente por u y h , se obtiene finalmente la celeridad de la onda asociada a la perturbación del lecho al reemplazar en la Ec. 32:

$$c^{(3)} = \frac{(1 - \lambda_p) 0.9 \mathbb{T} \left(\frac{Kn}{\rho g R d_s} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \left(\frac{u}{h} \right)^n + \xi \sigma \left(\frac{h}{u} \right)^\sigma \right)}{h(1 - \beta \mathbb{Fr}^2) \left(\frac{K}{\rho g R d_s} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \left(\frac{u}{h} \right)^n - \xi \left(\frac{h}{u} \right)^\sigma \right)^{0.55}} \quad (54)$$

Es fácil demostrar que el coeficiente de Boussinesq para el flujo laminar uniforme o gradualmente variado de un fluido tipo ley de potencia es

$$\beta = \frac{4n+2}{3n+1} \quad (55)$$

3.5 Expresión de la celeridad de las ondas mediante una expansión a segundo orden

Los resultados anteriores pueden extenderse considerando una expansión de orden dos para s en función de $\mathbb{M}$:

$$s = s_o + \mathbb{M} s_1 + \mathbb{M}^2 s_2 + \vartheta(\mathbb{M}^3) \quad (56)$$

De donde resulta que s^2 y s^3 truncados a $\vartheta(\mathbb{M}^3)$ están dados por

$$s^2 = s_o^2 + 2s_o s_1 \mathbb{M} + 2s_o s_2 \mathbb{M}^2 + s_1^2 \mathbb{M}^2 + \vartheta(\mathbb{M}^3) \quad (57)$$

$$s^3 = s_o^3 + 3s_o^2 s_1 \mathbb{M} + 3s_o^2 s_2 \mathbb{M}^2 + 3s_o s_1^2 \mathbb{M}^2 + \vartheta(\mathbb{M}^3) \quad (58)$$

Reemplazando las expansiones anteriores en la Ec. (17)

$$\begin{aligned} 0 = & (s_o^3 + 3s_o s_1 \mathbb{M} + 3(s_o^2 s_2 + s_o s_1^2) \mathbb{M}^2) \Pi_1^3 \mathbb{Fr}^2 \\ & - (s_o^2 + 2s_o s_1 \mathbb{M} + (2s_o s_2 + s_1^2) \mathbb{M}^2) \Pi_1^2 \mathbb{Fr}^2 2\beta u' \\ & - (s_o \mathbb{M} + \mathbb{M}^2 s_1 + \mathbb{M}^3 s_2) (\Pi_1 g'_{su}) \\ & - (s_o + \mathbb{M} s_1 + \mathbb{M}^2 s_2) \Pi_1 (h' - \mathbb{Fr}^2 \beta u'^2) - \mathbb{M} (g'_{sh} h' - g'_{su} u') \end{aligned} \quad (59)$$

Los resultados a orden cero y orden uno corresponden a las Ecs. (22), (23), (24), (28) y (29). Se obtiene que la ecuación para segundo orden de $\mathbb{M}$ es:

$$\begin{aligned} & 3(s_o^2 s_2 + s_o s_1^2) \mathbb{M}^2 \Pi_1^3 \mathbb{Fr}^2 - (2s_o s_2 + s_1^2) \mathbb{M}^2 \Pi_1^2 \mathbb{Fr}^2 2\beta u' - \mathbb{M}^2 s_1 \Pi_1 g'_{su} \\ & - \Pi_1 (h' - \mathbb{Fr}^2 \beta u'^2) \mathbb{M}^2 s_2 = 0 \end{aligned} \quad (60)$$

Despejando s_2 y empleando que para la perturbación del lecho se tiene $s_0^{(3)} = 0$ se tiene la corrección de segundo orden para $s^{(3)}$:

$$s_2^{(3)} = -\mathbb{F}\mathbb{r}^2 \frac{2\beta u'(g'_{su}u' - g'_{sh}h')^2}{h'^3 \Pi_1 \left(1 - \beta \mathbb{F}\mathbb{r}^2 \frac{u'^2}{h'}\right)^3} - g'_{su} \frac{(g'_{su}u' - g'_{sh}h')}{h'^2 \Pi_1 \left(1 - \beta \mathbb{F}\mathbb{r}^2 \frac{u'^2}{h'}\right)^2} \quad (61)$$

De este modo, considerando que $s_0^{(3)} = 0$, la celeridad de la onda o perturbación del fondo a segundo orden es

$$s^{(3)} = \mathbb{M}s_1^{(3)} + \mathbb{M}^2 s_2^{(3)} \quad (62)$$

Reemplazando Ecs. (29) y (61) en Ec. (62) se tiene la celeridad adimensional de la perturbación del lecho:

$$s^{(3)} = \frac{(g'_{su}u' - g'_{sh}h')}{\Pi_1(h' - \mathbb{F}\mathbb{r}^2 \beta u'^2)} \mathbb{M} - \mathbb{F}\mathbb{r}^2 \frac{2\beta u'(g'_{su}u' - g'_{sh}h')^2}{h'^3 \Pi_1 \left(1 - \beta \mathbb{F}\mathbb{r}^2 \frac{u'^2}{h'}\right)^3} \mathbb{M}^2 - g'_{su} \frac{(g'_{su}u' - g'_{sh}h')}{h'^2 \Pi_1 \left(1 - \beta \mathbb{F}\mathbb{r}^2 \frac{u'^2}{h'}\right)^2} \mathbb{M}^2 \quad (63)$$

La expresión anterior con dimensiones se traduce en:

$$c^{(3)} = \frac{1}{(1 - \lambda_p)} \frac{(q_{su}u - q_{sh}h)}{h \left(1 - \beta \frac{u^2}{gh}\right)} - \frac{2\beta}{(1 - \lambda_p)^2} \frac{u(q_{su}u - q_{sh}h)^2}{g h^3 \left(1 - \beta \frac{u^2}{gh}\right)^3} - \frac{1}{(1 - \lambda_p)^2} \frac{q_{su}(uq_{su} - h q_{sh})}{h^2 \left(1 - \beta \frac{u^2}{gh}\right)^2} \quad (64)$$

El primer término del lado derecho de la Ec. (64) corresponde al término de orden uno de la celeridad de la perturbación del fondo y los dos últimos son la contribución de segundo orden. Expresando las contribuciones de primer y segundo orden con variables con dimensiones, quedan:

$$c_1^{(3)} = \frac{1}{(1 - \lambda_p)} \frac{0,9 \mathbb{T}}{h \left(1 - \beta \frac{u^2}{gh}\right)} \frac{\left(\frac{K}{(\rho_s - \rho)gd_s} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n \left(n \left(\frac{u}{h}\right)^n + \xi \sigma \left(\frac{h}{u}\right)^\sigma\right)\right)}{\left(\frac{K}{(\rho_s - \rho)gd_s} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^n \left(\left(\frac{u}{h}\right)^n - \xi \left(\frac{h}{u}\right)^\sigma\right)\right)^{0,55}} \quad (65)$$

$$\begin{aligned}
 c_2^{(3)} &= \\
 &= -\frac{2\beta}{(1-\lambda_p)^2} \frac{u}{g} \frac{1}{h^3 \left(1 - \beta \frac{u^2}{gh}\right)^3} \left(0.9 \mathbb{T} \frac{\left(\frac{K}{(\rho_s - \rho)gd_s} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n n \left(\frac{u}{h} \right)^n + \xi \sigma \left(\frac{h}{u} \right)^\sigma \right)}{\left(\frac{K}{(\rho_s - \rho)gd_s} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \left(\frac{u}{h} \right)^n - \xi \left(\frac{h}{u} \right)^\sigma \right)^{0.55}} \right)^2 \\
 &\quad - \frac{0.45 \mathbb{T}}{(1-\lambda_p)^2} \frac{\left(\frac{K}{(\rho_s - \rho)gd_s} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n n \left(\frac{u}{h} \right)^n + \xi \sigma \left(\frac{h}{u} \right)^\sigma \right)}{\left(\frac{K}{(\rho_s - \rho)gd_s} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \left(\frac{u}{h} \right)^n - \xi \left(\frac{h}{u} \right)^\sigma \right)^{0.55}} \times \\
 &\quad \times \frac{0.9 \mathbb{T}}{uh^2 \left(1 - \beta \frac{u^2}{gh}\right)^2} \frac{\left(\frac{K}{(\rho_s - \rho)gd_s} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n n \left(\frac{u}{h} \right)^n + \xi \sigma \left(\frac{h}{u} \right)^\sigma \right)}{\left(\frac{K}{(\rho_s - \rho)gd_s} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \left(\frac{u}{h} \right)^n + \xi \left(\frac{h}{u} \right)^\sigma \right)^{0.55}}
 \end{aligned} \tag{66}$$

$\mathbb{T}$ está definido en la Ec. (35). ξ y σ son parámetros asociados al esfuerzo de corte crítico, dados por las Ecs. (49) y (59), respectivamente.

De este modo, la celeridad de las formas de fondo (en su estado lineal), expandida al segundo orden es

$$c^{(3)} = c_1^{(3)} + c_2^{(3)} \tag{67}$$

Notar que solo las perturbaciones en la superficie libre tienen un término de orden cero dados por la Ec. (27): $c_o^{(1)} = u + \sqrt{gh}$ y $c_o^{(2)} = u - \sqrt{gh}$.

4. DISCUSIÓN Y CONCLUSIÓN

El resultado obtenido en la sección anterior presenta algunas limitaciones. En primer lugar, fue deducido mediante un análisis lineal de las ecuaciones, por lo que la primera restricción de la Ec. (64) demanda que los valores de la razón de entre el caudal de sólido y el caudal líquido ($\mathbb{M}$) sea pequeña. Definiendo el número de Froude de manera usual, $Fr^2 = u^2/\sqrt{gh}$ (distinto a Fr^2 , el que está basado en las escalas del flujo H y U), la celeridad de la forma de fondo truncada al término que domina es (Ec. (32)):

$$c^{(3)} = \frac{1}{(1-\lambda_p)} \frac{1}{h(1-\beta Fr^2)} \left(u \frac{\partial q_s}{\partial u} - h \frac{\partial q_s}{\partial h} \right) \tag{68}$$

Resulta de interés analizar el signo de $c^{(3)}$ ya que indica el sentido en que se mueven las perturbaciones. $(1-\lambda_p)$ es siempre positivo. El último término en paréntesis de la Ec. (68) puede reescribirse usando la regla de la cadena de la siguiente forma:

$$u \frac{\partial q_s}{\partial u} - h \frac{\partial q_s}{\partial h} = u \frac{\partial q_s}{\partial \tau_o} \frac{\partial \tau_o}{\partial u} - h \frac{\partial q_s}{\partial \tau_o} \frac{\partial \tau_o}{\partial h} = \left(u \frac{\partial \tau_o}{\partial u} - h \frac{\partial \tau_o}{\partial h} \right) \frac{\partial q_s}{\partial \tau_o} \tag{69}$$

Las relaciones de gasto sólido demuestran que $\partial q_s / \partial \tau_o > 0$. Ec. (43) indica que $\partial \tau_o / \partial h < 0$ mientras que $\partial \tau_o / \partial h > 0$, por lo que el único término que puede ser positivo o negativo de la Ec. (68) es $(1 - \beta Fr^2)$. De este modo, para régimen subcrítico ($Fr^2 < 1/\beta$) el denominador de los distintos términos de la expresión para $c^{(3)}$ es positivo lo que indica que la perturbación del fondo se propaga hacia aguas abajo como es el caso de las ondas sedimentarias que se generan en el régimen inferior (rizos y dunas, Simons & Richardson, 1966). Para régimen supercrítico ($Fr^2 > 1/\beta$) la perturbación se propaga hacia aguas arriba según la Ec. (68), como es el caso de las antidunas. Sin embargo, el mecanismo de generación de antidunas no está contemplado en el análisis hecho en este estudio, limitado a deformaciones pequeñas del lecho, lo que no es el caso de las antidunas.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el financiamiento entregado por FONDECYT a través del proyecto de investigación N°1161751. El segundo autor agradece también al proyecto ANID AFB230001.

REFERENCIAS

- Andreotti, B., Claudin, P., Devauchelle, O., Durán, O., & Fourrière, A. (2012). Bedforms in a turbulent stream: Ripples, chevrons and antidunes. *J. Fluid Mech.*, Vol. 690, pp. 94-128.
- Ashida, K. & Michiue, M. (1972) Study on hydraulic resistance and bedload transport rate in alluvial streams. *Proc. Japan Soc. Civ. Engng.*, Vol. 206, pp. 59-69.
- Aziz, N, & Prasad, S. (1985). Sediment Transport in Shallow Flows. *ASCE, J. Hydr. Eng.*, Vol. 111, No.10, pp. 1327–1342.
- Bagnold, R. A. (1973), The nature of saltation and of bed-load transport in water, *Proc. Roy. Soc., Ser. A*, 332, 473-504.
- Barré de Saint-Venant, A. (1871). Théorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leurs lits. *Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences*, Vol. 73 (1871).
- Brownlie, W.R. (1981). *Prediction of the flow depth and sediment discharge in open channels*. Rep. N-KH-R-43A, Keck Lab. of hydraulics and Water Resources, California Institute of Technology, Pasadena, California.
- Callander, R. (1968). Instability and river meanders. *J. Fluid Mech.* (1969). Vol. 36, pp. 465-480.
- Charru, F., Mouilleron-Arnould, H., & Eiff, O. (2004). Erosion and deposition of particles on a bed sheared by a viscous flow. *J. Fluid Mech.*, Vol. 519, pp.55–80.
- Chaudhry, M.H. (1979). *Applied hydraulic transients*. Springer, 1st Ed. New York.
- Chhabra, R.P. (2010). Non-Newtonian Fluids: An introduction. In *Rheology of complex Fluids*; Deshpande, A. P., Sunil Kumer, P. B., Krishnan, J. M., Eds; Springer Science+Business Media: New York.
- Chien, N. (1954). *Meyer-Peter formula for bed-load transport and Einstein bed-load function*. M.R.D. Sediment Series No. 7, Univ. of California-Berkeley, and The Missouri River Division, U.S. Army Corps of Engineers, Berkeley, Calif.

- Chow, V.T. (1959). Open Channel hydraulics. McGraw-Hill Book Company, Inc; New York.
- Dubois, M.P. (1879): Le Rhone et les rivières a lit affouillable, Mem.et Doc., Annales des Pont et Chaussées, ser.5, vol. XVIII, pp. 141-195.
- Dubuat L. 1786. *Principles D'hydraulique et de Pyrodynamique Verifies Par un Grand Nombre D'experiences Faites par Ordre du Gouvernement*, 2nd. Firmin Didot: Paris.
- Einstein, H.A., (1942). Formulas for the transportation of bedload. Trans. Am. Soc. Civ. Eng. Vol.107, pp. 561–597.
- Einstein, H. A. (1950). *The bedload function for sediment transportation in open channel flow*. U.S. Dept. Agric., Tech. Bull. No 1026. US Dept. Agriculture, Washington, D.C.
- Engelund, F. & Fredsøe, J. (1976). A sediment transport model for straight alluvial channels. Nord. Hydrol., Vol. 7, pp.127-144.
- Engelund, F. & Hansen, E. (1972). *A Monograph on sediment transport*, 3rd ed., pp. 62, teknisk forlag, Copenhagen, Denmark.
- Exner, F. (1925) Über die Wechselwirkung Zwischen Wasser und Geschiebe. Flüssen, Sitzber. Akad. Wiss. Wien, pt. Ila, Bd. 134, pp. 199. 129.
- Fernandez-Luque, R. & Van Beek, R. (1976) Erosion and transport of bed sediment. J. Hydrol. Res., Vol: 14, pp. 127-144.
- Gilbert, G. K. (1914), *Transport of debris by running water*, U.S. Geol. Surv. Prof Pap. 86.
- González, R., A. Tamburrino, A Vacca & M. Iervolino (2020) Pulsating Flow of an Ostwald—de Waele Fluid between Parallel Plates. Water, Vol. 12, No. 4, 932.
- Gradowczyk, M. (1968). Wave propagation and boundary instability in erodible-bed channels. Journal of Fluid Mechanics, Vol.33, No.1, pp. 93-112. 59.
- Grass, A. (1970). Initial Instability of Fine Bed Sand. ASCE, J. Hydr. Div., Vol. 96, No. 3, pp. 619-632. 72.
- Kennedy, J. F. (1963). The mechanics of dunes and antidunes in erodible-bed channels. J. Fluid Mech., Vol.16, No. 4, 521-544.
- Mantz, P. (1977). Incipient transport of fine grains and flakes by fluids-extended Shields diagram. ASCE, J. Hydr. Div., 103(HY6), pp. 601-615.
- Meyer-Peter, E. & Müller, R. (1948). Formulas for bedload transport. Proc. 2nd Congress IAHR, Stockholm.
- Negrete, F. (2014). Estudio Experimental de formas de fondo en flujos laminares con superficie libre de fluidos pseudoplásticos. Memoria de Ingeniería Civil. Santiago, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
- Niño, Y. & García, M. (1998). Using lagrangian particle saltation observations for bedload sediment transport modelling. Hydrological Processes, Vol.12, No.8, pp.1197–1218.
- Ouriemi, M., Aussillous, P., & Guazzelli, E. (2009). Sediment dynamics. Part 1. Bed Load transport by laminar shearing flows. J. Fluid Mech., 636. Pp. 295-319.
- Parker, G., Seminara, G. and Solari, L. (2003). Bed load at low Shields stress on arbitrarily sloping beds: Alternative entrainment formulation. Water Res. Res., Vol. 39, No. 7, 1183.
- Rouse, H. 1939. *An analysis of sediment transportation in the light of fluid turbulence*. Soil Conservation Services Report No.SCS-Tp-25.

- Schoklitsch, A., 1914. “Über Schleppkraft und Geschübbewegung”. Englemann, Leipzig, Germany.
- Shields, A., 1936. *Application of Similarity Principles and Turbulence Research to Bedload Movement* (Traducción al inglés del documento original en alemán), Hydrodynamics Laboratory. California Institute of Technology, Publication No. 167.
- Simons, D.B. & E.V. Richardson (1966) *Resistance to Flow in Alluvial Channels*. Geological Survey Professional Paper 422-J. U.S. Government Printing Office. Washington D.C.
- Tamburrino, A. (1987) Criterios de estabilidad del escurrimiento (segunda parte). Revista SOCHID, Vol. 2, No. 2, pp. 15-27.
- Tamburrino, A., D. Carrillo, F. Negrete & C. Ihle (2016) Critical shear stress for incipient motion of non-cohesive particles in open channel flows of pseudoplastic fluids. Can. J. Chem. Eng., Vol. 94, Issue 6, pp. 1084–1091.
- Valance, A. & Langlois, V. (2005). Ripple formation over a sand bed submitted to a laminar shear flow. The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems, Vol. 43, pp.283–294
- Van Rijn, L. C. (1984) Sediment transport. Part I: bed load transport. ASCE, J. Hydr. Eng., 110, pp. 1431-1456.
- Vanoni, V. & Brooks, N. (1957) *Laboratory studies of the roughness and suspended load of alluvial streams*. Sedimentation laboratory Rep. No. E68. California Institute of Technology, Pasadena, CA. 137. 128.
- Vanoni, V. (1974). Factors Determining Bed Forms of Alluvial Streams. Journal of the Hydraulics Division, Vol. 100, No.3, pp. 363-377.
- Vásquez, C. (2020). *Caracterización de las formas de fondo generadas en un lecho granular por el flujo de un fluido pseudoplástico en canales*. Memoria para optar al título de Ingeniería Civil. Santiago, Universidad de Chile, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
- Wan, Z. & Song, T. (1987). The effect of fine particles on vertical concentration distribution and transport rate of coarse particles. Proc. 22nd IAHR Congress, Laussane, Switzerland, pp. 80-85.
- Williams, P. & Kemp, P. (1971). Initiation of Ripples on Flat Sediment Beds. ASCE, J. Hydr. Div., 1971, Vol. 97, No 4, pp. 502-522.

ACERCA DE LOS AUTORES

Rodrigo González es Ingeniero Civil, mención Hidráulica, Sanitaria y Ambiental y Magister en Ciencias de la Ingeniería, mención Recursos Hídricos y Medio Ambiente, ambos por la Universidad de Chile. En la actualidad es alumno del Programa de Doctorado en Ciencias de la Ingeniería, mención Fluidodinámica en la misma Universidad. Sus áreas de interés se centran en soluciones analíticas y aproximaciones por perturbaciones para flujos de fluidos tanto newtonianos como no newtonianos.

Aldo Tamburrino es Ingeniero Civil Hidráulico de la Universidad de Chile. Obtuvo su M.Sc. y Ph.D en Ingeniería Civil por la Universidad de Minnesota, USA. En la actualidad es

Profesor Asociado del Departamento de Ingeniería Civil e Investigador Asociado del Advanced Mining Technology Center (AMTC), ambos de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile. Realiza docencia en la carrera de Ingeniería Civil y en programas de magister y doctorado. Sus áreas de trabajo en la actualidad se centran en hidráulica fundamental, flujos detríticos y granulares y dinámica de fluidos no-newtonianos.

ERRATA

Se ha detectado una errata en el artículo de A. Garcés y S. Montserrat (2021) “Avances en la Aplicación de Modelos Aluvionales y Principales Desafíos”, Revista SOCHID, Vol. 36, No. 2 pp. 33-48.

En página 37, Ec. 11, dice:

$$S_f = \mu N + \frac{\rho g V^2}{\xi}$$

Debe decir:

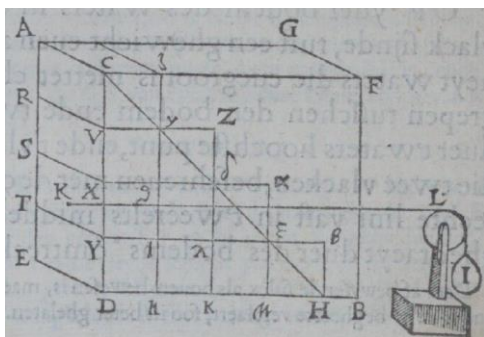
$$\tau_0 = \mu N + \frac{\rho g V^2}{\xi}$$

donde τ_0 es el esfuerzo de corte actuando sobre el lecho.

HIDRO-GRAFÍA

ALDO TAMBURRINO TAVANTZIS

La Hidro-Grafía de este número fue tomada de un libro clásico publicado en 1586 por un destacado ingeniero hidráulico de la época. En la imagen el autor presenta un esquema que corresponde a:



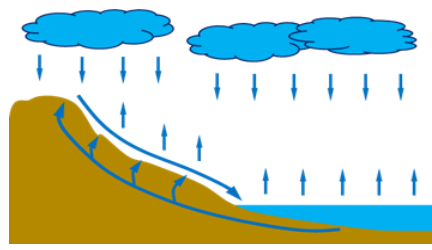
- El diseño de una compuerta (ACDE) que puede abrirse por sectores (ACVR, RVXS, SXYT, TYDE) con el objeto de controlar el caudal.
- Un método (impracticable) para determinar la densidad de un sólido, representado por el cuerpo I en la figura.
- Un método para determinar analíticamente la fuerza hidrostática que se ejerce en un plano vertical.

NÚMERO ANTERIOR

La respuesta correcta de la Hidro-Grafía del número anterior es la c). Corresponde a una alegoría del modelo del ciclo hidrológico denominado *ciclo hidrológico inverso*, en el que el agua del mar vuelve a la tierra y se eleva por el interior de ella originando el agua subterránea, manantiales y ríos. Las lluvias contribuyen a la escorrentía superficial.



La evaporación del agua superficial, formación de nubes y posterior retorno en forma de lluvia ya se encuentra en los



ESQUEMA DEL CICLO HIDROLÓGICO INVERSO

griegos pre-socráticos (Hesíodo, ~700 a.C.; Tales de Mileto, ~624-546 a.C.; Anaximandro, ~610-546 a.C.; Xenofanes de Colofon ~ 560-478 a.C.; etc.). Según Tales de Mileto, los manantiales y ríos provenían del agua del océano, la que se introducía en la tierra para luego subir a la superficie. Sus ideas fueron seguidas, entre otros, por Platón (~427-347 a.C.), Aristóteles (384-322 a.C.), Leonardo da Vinci (1452-1549) y continuaba en boga hasta entrado el s. XVII, cuando en 1678 Johan Herbinus (1632-1679) publica *Dissertationes de Admirandis Mundi Cataractis Supra et Subterraneis* (Discursos sobre la admiración de las cataratas del mundo superior y subterráneo), cuyo frontispicio corresponde a la alegoría antes indicada.

INVITACION A CONTRIBUIR CON ARTÍCULOS

La Revista de la Sociedad Chilena de Ingeniería Hidráulica invita a contribuir con artículos para ser publicados en sus próximos números. Los artículos pueden ser en castellano o inglés.

Los artículos buscan difundir trabajos en el área de interés de la Sociedad Chilena de Ingeniería Hidráulica, especialmente aquellos relativos a la hidráulica, hidrología y mecánica de fluidos en general, así como otros aspectos relacionados con el agua, como su uso, gestión, recursos, tecnologías, historia, etc. Los artículos pueden ser de investigación teórica o aplicada, soluciones novedosas a problemas de ingeniería, difusión u otros temas de interés para la comunidad hidráulica nacional.

El formato de presentación de los trabajos puede solicitarse al Editor a la dirección electrónica atamburr@uchile.cl

