

*REVISTA DE LA
SOCIEDAD CHILENA DE
INGENIERÍA HIDRÁULICA*

SOCHID

Sede Instituto de Ingenieros de Chile - San Martín 352 - Fono 6984028 - Santiago CHILE

ISS 0716-3746
Volumen 28, Número 1
Diciembre 2013

DIRECTORIO

Presidente
José Vargas Baecheler

DIRECTORES

Raúl Demangel Castro
Rodrigo Cienfuegos Carrasco
Luis Estellé Aguirre
Ricardo González Valenzuela
Alberto de la Fuente Stranger

DIRECTORES HONORARIOS

Ernesto Brown Fernández
Bonifacio Fernández Larrañaga
Horacio Mery Mery
Humberto Peña Torrealba
Sergio Radrigán Vogel
Eduardo Varas Castellón
Jorge Bravo Soissa
Luis Ayala Riquelme
Ludwig Stowhas Borghetti

EDITOR DE LA REVISTA

Alberto de la Fuente Stranger

COMITÉ REVISOR

José Vargas Baecheler
Alberto de la Fuente Stranger

DOMICILIO

San Martín 352 (Sede del Instituto de Ingenieros de Chile)
Santiago
698 40 28 / 696 86 47
www.sochid.cl

FOTO PORTADA

Punta de Lobos, VI Región del Libertador General Bernardo O'Higgins, Chile

Diseño:
Carla Jiménez Araya

Impresión:
EPS Ediciones, Promociones y
Servicios.

Tabla de Contenidos

Editorial	07
Flores, R. Estimación de Parámetros de Oleaje Mediante Sensores Remotos	09
De la Fuente, A. y Herrera, P. Solución Numérica de la ecuación de difusión-reacción y ejemplos de aplicación	25
Titulados 2013	51
Titulados Universidad de Chile Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas Departamento de Ingeniería Civil	53
Titulados Pontificia Universidad Católica de Chile Escuela de Ingeniería Departamento de Ingeniería Hidráulica y Ambiental	57
Titulados Universidad de Concepción Facultad de Ingeniería Departamento de Ingeniería Civil	65
Titulados Universidad Técnica Federico Santa María Departamento de Obras Civiles	67
Titulados Pontificia Universidad Católica de Valparaíso Facultad de Ingeniería Carrera de Ingeniería Civil	71
Titulados Universidad de la Serena	73

Editorial

Nuestra sociedad ya avanza por los 42 años de vida, y fiel a sus estatutos, en todos estos años se ha mantenido, divulgando la disciplina hidráulica, ya sea a través de jornadas, congresos, charlas, publicación de libros, revistas, etc.

En el último período hemos realizado un convenio con la IAHR (International Association Hydro-Environment Engineering and Research) la organización mundial de los ingenieros hidráulicos, que permite que más de 30 colegas ingenieros chilenos, sean al mismo tiempo socios de SOCHID y de IAHR, en una ventajosa condición.

Después de 20 años, el próximo año, nuevamente se realiza la IAHR División Latinoamericana; esta es su versión vigésimo sexta, y esperamos tener más de 500 trabajos de Latinoamérica y algunos otros países como España, EEUU, Alemania, etc. Esta es una responsabilidad que asumimos como sociedad y no cabe duda que con el apoyo de cada uno de ustedes será un evento exitoso.

En el último período estamos dando especial apoyo a la Hidráulica Marítima, y estamos dispuestos a seguir haciéndolo, de tal forma que se haga la mayor cantidad de eventos en esta temática, dada su importancia y trascendencia en Chile.

Por otro lado han surgido voces sobre como incorporar otros aspectos relevantes de la ingeniería del agua en la temática de SOCHID, como son los aspectos ambientales del agua y sus efectos en los ecosistemas. No cabe duda que ya quedan refrendados, desde hace tiempo, en las presentaciones a los congresos chilenos, pero como lo hemos hecho, éste será un tema abierto a discutir en instancias adecuadas.

Estamos en deuda con temas tan relevantes como las obras hidráulicas, por lo que ya hemos acordado que un próximo número de la revista será dedicado a esta temática.

Como último aspecto y no por ello menos importante, desde este número en adelante actúa como editor el Dr. Alberto de la Fuente Stranger, Profesor Asistente del Departamento de Ingeniería Civil de la Universidad de Chile, y nuevo miembro del directorio de SOCHID desde mayo 2013.

José Vargas B.
Presidente SOCHID

Estimación de Parámetros de Oleaje Mediante Sensores Remotos

Raúl Flores Audibert

Departamento de Obras Civiles, Universidad Técnica Federico Santa María

RESUMEN

Señales de video de alta resolución provenientes de un gran canal de oleaje son analizadas con el propósito de medir directamente cantidades asociadas al oleaje en rotura. El análisis se lleva a cabo en escala de olas individuales, mediante algoritmos de procesamiento de imágenes que permiten la extracción del largo de la región en rotura (en inglés, roller) desde las señales de intensidad óptica. Esta cantidad es utilizada para estimar la disipación de energía, flujo de energía y flujo de momentum en la zona de rompiente, parámetros que a su vez son utilizados para calcular la altura de ola y el nivel medio de la superficie libre. El método es validado mediante comparación con mediciones tomadas por sensores ubicados a lo largo del canal. Se encuentra que existe un muy buen ajuste en la predicción de ambos parámetros, dando pie a un nuevo enfoque para estimar disipación y forzantes del oleaje en rotura desde datos obtenidos en forma remota. Dado que la metodología propuesta se basa en la estimación de propiedades geométricas del oleaje en rotura, puede ser aplicada mediante diferentes técnicas de detección remota (por ejemplo, radar).

1. Introducción

Una descripción precisa de la hidro-

dinámica costera requiere al menos de buenas estimaciones de cantidades como altura de ola, nivel medio de la superficie libre y forzantes inducidos por el fenómeno de rotura. Para obtener dichas cantidades pueden utilizarse observaciones in situ, modelos numéricos o una combinación de ambas metodologías. Las observaciones in situ son consideradas más precisas y confiables, pero generalmente son muy costosas, difíciles de lograr y tienen poca resolución espacial. Los modelos numéricos de transformación de oleaje varían en complejidad, eficiencia computacional y precisión, y para capturar la dinámica de la rotura la mayoría de los modelos requiere incorporar este proceso explícitamente, mediante alguna expresión ad-hoc. Por ejemplo, los modelos de transformación de oleaje basados en el flujo energético, comúnmente introducen parametrizaciones de la rotura (Battjes and Janssen, 1978; Thornton and Guza, 1983). Un aspecto de este tipo de modelos es que tienen éxito modelando la evolución de la altura de ola pero fallan al estimar cantidades relacionadas con la rotura, como el nivel medio de la superficie. Se ha demostrado que para mejorar estas estimaciones, la contribución del roller (el cuerpo agua-aire turbulento que se forma al iniciar la rotura y que es transportado por la ola) a los flujos de energía y momentum debe ser considerada (Svendsen 1984a,b). Uno de los principales beneficios de incluir estos términos extra ha sido

una mejora en la modelación de la zona de transición que existe inmediatamente después de la rotura. Aunque el decaimiento de la altura de ola comienza inmediatamente en el punto de rotura, las observaciones indican que el set-up (aumento del nivel medio de la superficie) se inicia bastante más allá de ese punto (Svendsen, 1978). La incorporación de los efectos de roller en las ecuaciones hidrodinámicas provoca un desfase espacial entre el inicio de la disipación de energía y la transferencia de momentum a la columna de agua, lo que se manifiesta en que el set-up no inicia inmediatamente, concordando con las observaciones.

Varios modelos de evolución de oleaje que incorporan al roller se han propuesto (Lippmann et. Al, 1996; Dally and Brown, 1995; Stive and de Vriend, 1994), donde en general para estimar la evolución de la altura de ola y nivel medio de la superficie se utiliza un enfoque en el cual dadas ciertas condiciones costa afuera el oleaje se deja evolucionar sobre una batimetría conocida, calibrando parámetros contra mediciones in situ.

Respecto de las mediciones, es posible decir que las herramientas de detección remota han progresado significativamente durante los últimos años, y han sido utilizadas en estudios costeros en forma cuantitativa. La naturaleza sinóptica de estas técnicas permite capturar la variabilidad temporal y espacial de muchos procesos costeros, incluido el rompimiento. Aún más, la rotura del oleaje deja señales bastante prominentes en un número importante de instrumentos de detección remota, tales como sistemas ópticos o de microondas, lo que abre la posibili-

dad de medir directamente cantidades asociadas a ella. Por ejemplo, en sistemas ópticos la rotura se asocia a valores altos de intensidad. Sin embargo, la relación no es tan directa pues otros fenómenos, como espuma residual u olas muy empujadas, también producen intensidades ópticas altas y por tanto contaminan la señal dificultando el proceso de discriminación del oleaje en rotura, que es el que reviste interés dinámico. Para detección óptica, el producto más común para estimar la disipación en zona de rompiente ha sido lo que se conoce como “time exposure” (promedio de una serie de imágenes sucesivas), donde las contribuciones del oleaje en rotura y la espuma remanente no pueden ser discriminadas. De esta forma, este enfoque ha sido más que todo cualitativo y mayormente asociado a determinar la extensión de la zona de rotura y su variabilidad, para posteriormente asociarlo a la variabilidad morfológica de la batimetría.

Haller y Catalán (2009) analizaron la señal óptica y su relación con las características geométricas del roller para oleaje regular sobre batimetría con barra. Encontraron que la señal óptica del roller aumenta abruptamente desde su comienzo hasta un máximo en la cresta de la ola, y como resultado de esto, propusieron un método para extraer el largo del roller desde señales de video.

Este tipo de información puede ser integrado a modelaciones costeras para mejorar las estimaciones, bajo el supuesto de que existe una adecuada relación entre las cantidades medidas y la física del fenómeno. Para oleaje en rotura, Duncan (1981) reportó resultados para olas rompiendo en equilibrio en aguas profundas, publicando mediciones de área, ángulo y longitud del

roller. Posteriormente, Govender et al. (2002) publicaron mediciones obtenidas en laboratorio mediante video. Estas características geométricas, fundamentalmente el área del roller y su ángulo de inclinación, han sido relacionadas con la tasa de disipación de las olas en rotura (Duncan, 1981; Deigaard and Fredsoe, 1989) y el flujo de masa responsable de las corrientes de resaca (García Farez et al., 2000).

En este trabajo se siguen dichas ideas, acoplando información obtenida mediante video a un modelo de roller para estimar altura de ola y nivel medio de la superficie libre. El enfoque se pone en obtener desde las imágenes provenientes del video la tasa de disipación del roller y su momentum (esfuerzo de radiación), que son usados como input en el modelo numérico. Esta metodología constituye una nueva técnica para obtener información cuantitativa del oleaje rompiente.

El trabajo está organizado como sigue: la sección 2 presenta una breve revisión de la teoría, incluyendo los efectos del roller. La sección 3 presenta el experimento y las fuentes de información. Los algoritmos de proceso de las imágenes y resultados para la altura de ola y set-up son presentados en la sección 4, y una discu-

sión de los resultados sigue en la sección 5. La sección 6 presenta las conclusiones.

2. Teoría

Una forma de modelar la hidrodinámica costera es estimar el balance de cantidades promedio del flujo, removiendo la necesidad de describir de manera los procesos a escalas pequeñas, tales como la turbulencia. Aunque es bastante simple, este enfoque es adecuado para la estimación de propiedades estadísticas como perfiles de altura de ola y de nivel medio de la superficie, a costos computacionales muy bajos. Aquí, un set de dos ecuaciones diferenciales acopladas que describen los balances de energía y momentum en dirección perpendicular a la costa son utilizadas para obtener las alturas de ola y nivel medio de la superficie.

2.1 Balance de energía del roller

En la zona de rompiente, la principal fuente de disipación proviene de la interacción entre la ola y el roller, a través del trabajo que debe realizar la ola para transportar al roller en su frente, es decir, a una velocidad igual a su celeridad. El balance de energía del oleaje organizado (sin roller), puede escribirse como

$$D_{br} = -\frac{\partial}{\partial x}(E_w c_g) \quad (1)$$

donde D_{br} es la disipación, c_g es la velocidad de grupo y E_w es la ener-

gía del oleaje, tomada de la teoría lineal

$$E_w = \frac{1}{8} \rho g H_{rms}^2 \quad (2)$$

donde ρ es la densidad del agua, g es la aceleración de gravedad y H_{rms} es la altura de ola (raíz media cuadrática). Existen varios modelos en la literatura para la estimación de la disipación (Battjes and Janssen, 1978; Thornton y Guza, 1983; Alsina and Baldock, 2007), y tradicional-

mente la ecuación (1) se resuelve para la altura de ola.

De forma similar, existe una ecuación de balance energético para el roller (Stive and de Vriend, 1994)

$$\frac{\partial}{\partial x}(2E_r c) = D_{br} - D_r \quad (3)$$

donde E_r es la energía del roller, c es la velocidad de la ola y D_r es la disipación del roller.

La energía del roller puede estimarse según el trabajo de Svendsen (1984

$$E_r = \frac{\rho A c}{2T} \quad (4)$$

donde ρ es la densidad media del roller (asumimos igual a la densidad del agua y constante), A es el área de la sección transversal del roller y T es el período de ola. Al derivar la expresión anterior, se asume además que la velocidad media del roller es igual a la velocidad de la ola.

el trabajo realizado por los esfuerzos de corte en la interfaz roller-ola. Considerando que este esfuerzo de corte debe balancear el peso de roller para que exista balance de fuerzas (Duncan, 1981), la tasa de disipación por unidad de área corresponde a (Dally and Brown, 1995)

La disipación de energía del roller se toma como

$$D_r = \frac{\rho g A \sin \theta \cos \theta}{T} = \frac{2gE_r}{c} \sin \theta \cos \theta \quad (5)$$

donde θ es el ángulo de inclinación del roller. Este parámetro no se conoce a priori, pero puede considerarse como un parámetro de calibración de forma de reproducir de buena forma los datos

medidos.

Sustituyendo las ecuaciones (1) y (5) en (3) y reordenando términos se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x}(E_w c_g) = -\frac{\partial}{\partial x}(2E_r c) - \frac{2gE_r}{c} \sin \theta \cos \theta \quad (6)$$

De la ecuación anterior es posible observar que para resolver el flujo de energía (y por ende la altura de ola), se requiere conocer los parámetros provenientes del roller, que dependen de su geometría. Además, se requiere de conocer cantidades adicionales que pueden obtenerse desde

la teoría lineal del oleaje u otra, si la batimetría es conocida.

Para relacionar la ecuación (6) con el largo de roller que obtendremos mediante la señal de video, utilizamos la expresión propuesta por Duncan (1981)

$$\frac{A}{L^2} = 0.11 \pm 0.01 \quad (7)$$

que postula que la razón entre el área del roller y la longitud a lo largo del frente de ola es constante. Para obtener L , relacionamos la proyección horizontal del roller, que es lo que me-

dimos mediante el video, con el área mediante $A = 0.11(L_r / \cos \theta)^2$. Como resultado, el único parámetro libre es la inclinación del roller (parámetro de calibración).

2.2 balance de momentum

El roller también contribuye a los forzantes en la zona cercana a la costa, mediante su aporte a los esfuerzos de radiación (Longuet-Higgins and Stewart, 1964). Asumiendo una batimetría uniforme y esfuerzos de viento despreciables, el

balance de momentum establece que la fuerza hidrostática neta producto del set-up (aumento de la superficie libre, η) balancea al gradiente del esfuerzo de radiación (S_{xx}) y a la fricción de fondo (Longuet-Higgins and Stewart, 1964), de forma que

$$\frac{\partial}{\partial x} S_{xx} + \rho g(\bar{\eta} + h) \frac{\partial}{\partial x} \bar{\eta} + \tau_b = 0 \quad (8)$$

donde x es la coordenada en dirección a la costa, h es la profundidad, ρ es la densidad del agua y g es la aceleración de gravedad. La ecuación (8) se considera dominada por los esfuerzos de radiación y los gradientes de set-up, según demuestran estudios de laboratorio (Stive and Wind, 1982; Dally and Brown, 1995). De esta forma, los efectos de fricción de fondo no son considerados ($\tau_b \approx 0$).

En la presencia de olas en rotura la formulación para el esfuerzo de radiación debe extenderse con el momentum adicional que induce el roller (Svendsen, 1984), de forma que S_{xx} queda como

$$S_{xx} = S_{xx,w} + S_{xx,r} \quad (9)$$

donde el primer término del lado derecho representa el esfuerzo de radiación asociado a la ola, y el segundo término existe debido a la

presencia del roller. La componente de oleaje puede ser estimada como (Longuet-Higgins and Stewart, 1964)

$$S_{xx,w} = E_w \left(2 \frac{c_g}{c} - \frac{1}{2} \right) \quad (10)$$

mientras que la contribución del roller se expresa en función de la energía del roller (Svendsen, 1984)

$$S_{xx,r} = 2E_r \quad (11)$$

Sustituyendo las ecuaciones (10) y (11) en (8), y reordenando términos se obtiene

$$\rho g (\bar{\eta} + h) \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} \left[E_w \left(\frac{c_g}{c} - \frac{1}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x} (2E_r) \quad (12)$$

De esta forma, la ecuación (12) permite la estimación del set-up (nivel medio) cuando se acopla a la ecuación (6), usando como input la información de roller y el perfil de altura de ola, o en otras palabras, usar la información obtenida del video para obtener el forzante del roller en la zona de rompiente.

3. Experimento

Los datos experimentales se recolectaron en el canal de oleaje de la Universidad Estatal de Oregon (Oregon State University), Estados Unidos. El canal tiene aproximadamente

90 metros de largo, 3.7 metros de ancho y 4.6 metros de profundidad. La paleta de oleaje se ubica en un extremo, donde la profundidad es de 4.27 metros. El perfil batimétrico fue construido usando piezas de hormigón y diseñado para reproducir una batimetría observada en terreno, a escala 1:3 (Fig.1).

Mediciones de la elevación de la superficie se tomaron mediante seis instrumentos montados a lo largo del canal. Las corridas de oleaje se generaron usando espectros de banda angosta, por duraciones de 15 minutos. Se generaron cuatro condiciones distintas de oleaje

irregular, cuyas propiedades se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1. Propiedades series de oleaje

Corrida	Período (s)	Altura (m)
R25	4	0.43
R26	5	0.34
R27	2.7	0.37
R28	4	0.29

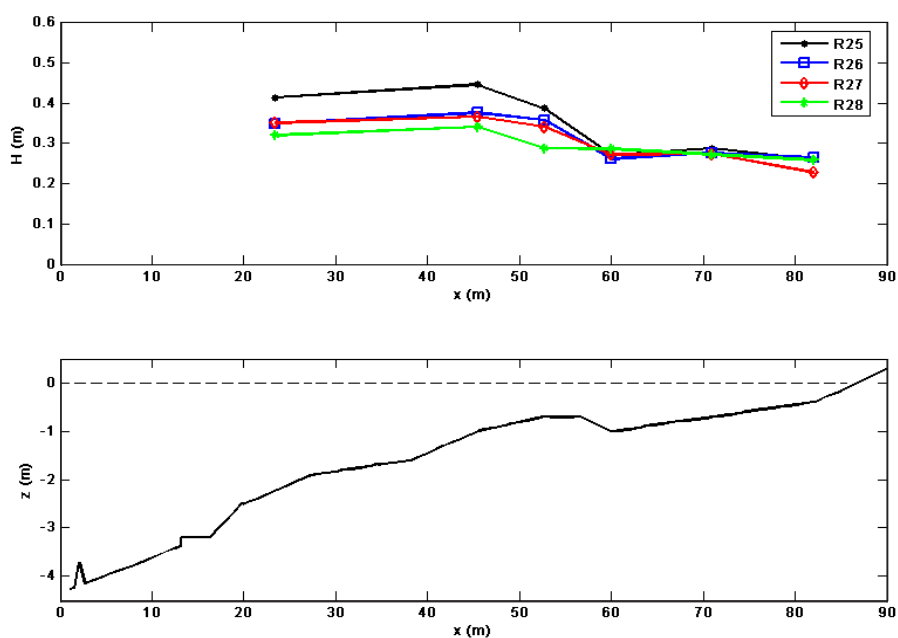


Figura 1. Condiciones experimentales. (Arriba) Alturas de ola (Abajo) Batimetría

Simultáneamente, se tomaron observaciones de video de alta resolución. El sistema de video consistió de 3 cámaras digitales montadas en techo de laboratorio, apuntando a diferentes secciones del canal, capturando la extensión completa de la zona de rotura de oleaje. Las cámaras se sincronizaron con los sensores de superficie libre. Las imágenes resultantes fueron

4. Proceso de datos y resultados

Las series de tiempo de intensidad óptica registradas mediante el video son procesadas y transformadas en “timestacks” (Fig. 2). Las variaciones en la intensidad de pixel dependen del mecanismo por el cual las olas son detectadas por la cámara. Para olas sin romper, el mecanismo de detección es principalmente reflexión especular de la luz incidente sobre la superficie

rectificadas, para llevarlas a coordenadas reales, y posteriormente interpoladas a una resolución $\Delta x = 1$ cm. Debido a que el canal es angosto y se puede asumir uniformidad en su ancho, se trabaja sólo con un arreglo de pixeles, correspondiente a la coordenada transversal $y=1.2$ m.

del agua, y es función del ángulo instantáneo definido por la cámara, la superficie del agua y la fuente de luz, y también del ángulo relativo entre la dirección de propagación del oleaje y la cámara. Por otro lado, el oleaje en rotura es detectado principalmente por dispersión isotrópica desde el roller, espuma y burbujas, dependiendo de la geometría del sistema en forma mínima.

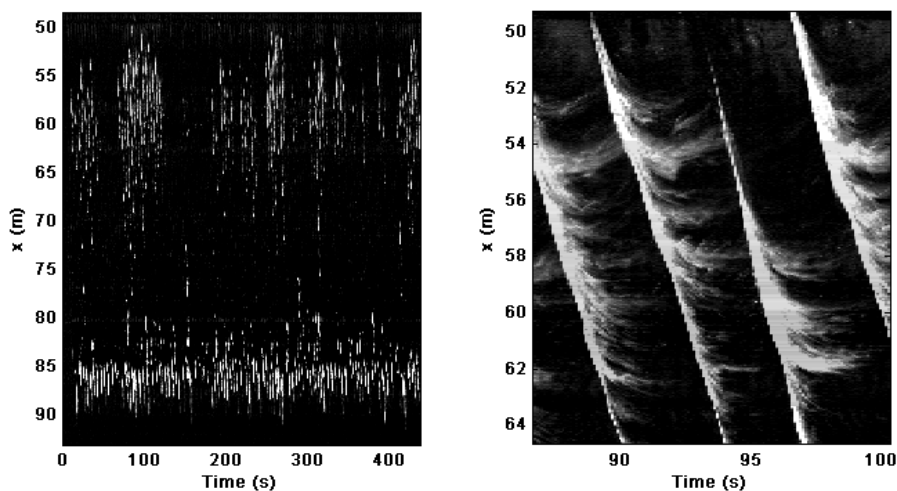


Figura 2. Ejemplo de timestack, corrida 25. (izq.) timestack completo donde se observan grupos de ola (der.) Close-up, donde las regiones blancas corresponden a oleaje en rotura y espuma.

4.1 Determinación de la longitud del roller

La estimación de la longitud de roller desde los datos de video se realiza ola por ola. En primer lugar, se aíslan las olas en rotura del resto del timestack, mediante un método de umbral de intensidad. Se considera que todos los pixeles con intensidades ópticas mayores a un cierto valor umbral corresponden a oleaje rompiente. Esto asume que toda rotura ocurre dejando una notable señal óptica. Siguiendo el trabajo de Haller y Catalán (2009), el umbral de intensidad se escoge como $\bar{I} + 2\sigma_I$, donde $\bar{I}, \sigma_I$ corresponden a la media y desviación estándar de la intensidad de pixel de todo el timestack. En la Figura 3, se muestra un perfil espacial de intensidad de pixel. El frente de ola se caracteriza por un fuerte incremento de la intensidad, lo que resulta en poca sensibilidad respecto del valor umbral escogido. El timestack original se

transforma entonces en un mapa binario de olas en rotura y oleaje no rompiente, donde una ola en rotura debe entenderse como una agrupación de pixeles que exceden el umbral. Este método detecta también espuma, pero como se verá, la metodología propuesta requiere de la identificación del frente de ola, de forma que esto no resulta problemático.

Luego, la identificación de los frentes de ola se realiza mediante una técnica de seguimiento aplicada al inicio del roller a medida que las olas se propagan hacia la costa. Para cada instante, el frente del roller se identifica como el primer punto que supera la intensidad umbral. El fin del roller se define como el punto en que la intensidad de pixel comienza a disminuir dirección costa afuera. Como resultado de este procedimiento, en la Figura 3 se identifican 3 olas en rotura.

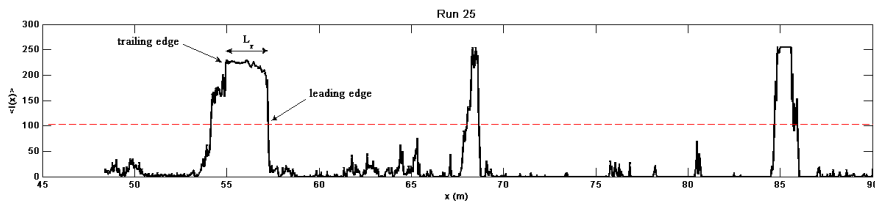


Figura 3. Ejemplo de serie de intensidad óptica para la corrida 25 en $t=100$ s. La línea roja representa la intensidad umbral.

Aplicando la metodología a todo el timestack, se obtiene un mapa espacio-temporal de largos de roller, como se muestra en la Figura 4 (arriba). Para cada coordenada espacial

donde existe rotura, se calcula un parámetro de resumen en raíz media cuadrática del largo del roller, según

$$L_{rms}(x) = \sqrt{\frac{1}{N_b(x)} \sum_{i=1}^n L_i(x)^2} \quad (13)$$

donde $L_i(x)$ y $N_b(x)$ corresponden a la longitud de roller y al número de olas en rotura asociadas a la coordenada $X = x$. La razón de utilizar un parámetro en raíz media cuadrática es para mantener consistencia con modelos paramétricos de evolución de oleaje, que entregan la raíz media cuadrática de la altura de ola. La ecuación (13) asume que la disipación de una ola individual es adecuadamente representada por una longi-

tud característica. En este sentido, el parámetro dado por (13) es un parámetro representativo de la disipación local en cada coordenada. Así, el modelo presentado aquí es una alternativa a los modelos que utilizan la fracción de oleaje en rotura para estimar la disipación en la zona de rompiente. La distribución de largos de roller rms se muestra en la Figura 4 (abajo).

4.2 Estimación de la altura de ola y set-up desde los datos de video

El proceso es bastante simple. Como se ha mencionado antes, este enfoque es distinto en el sentido en que aprovechamos datos obtenidos en forma remota para mejorar las estimaciones del modelo. En primer lugar, usamos los largos de roller para obtener estimaciones directas de la disipación de roller, su energía y contribución al esfuerzo de radiación. Luego, estas cantidades son incorporadas a la ecuación de energía (ec. 6), que se resuelve mediante un esquema de diferencias finitas para obtener la altura de ola H_{rms} . Finalmente, mediante la altura de ola es posible estimar el esfuerzo de radiación de

la ola, que usado junto al esfuerzo de radiación del roller permiten calcular el nivel medio de la superficie (set-up) desde la ecuación (8). La profundidad y el período del oleaje se suponen conocidos. Como primera aproximación, las propiedades del oleaje se obtienen desde la teoría lineal. El modelo se inicia con condiciones de borde en el sensor más lejano a la costa.

Para calibrar los resultados, se prueba un rango de ángulos de roller y se busca aquel que mejor ajusta el perfil modelado a los valores medidos de altura de ola. La comparación entre lo modelado y lo medido se realiza mediante un error medio cuadrático absoluto, definido por

$$\epsilon_{abs} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (P_i - O_i)^2} \cdot 100 \quad (14)$$

donde P_i es la predicción del modelo, O_i es la cantidad observada y N es el número de observaciones (una para cada sensor).

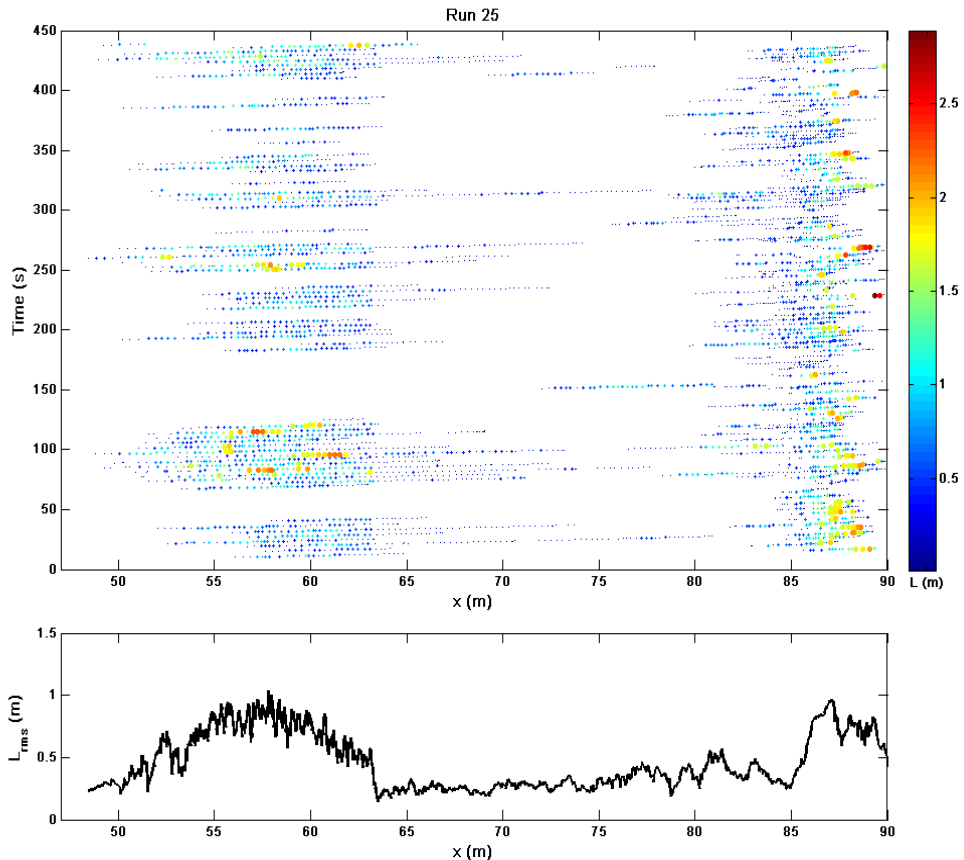


Figura 4. (Arriba) Mapa espacio-temporal de longitudes de roller. (Abajo) distribución en raíz media cuadrática de longitudes de roller

5. Resultados y discusión

Las Figuras 5 y 6 muestran resultados de perfiles de altura de ola y set-up para las corridas 25 y 27. Ambos parámetros comparan bien con las mediciones tomadas por los sensores del canal. La Tabla 2 muestra los errores, menores al 4% para todos los casos considerados. Una inspección detallada indica que el modelo falla cerca de la región donde se ubica la barra, donde

se inicia el rompimiento. De todos los casos, los mejores resultados son para la corrida 27, que corresponde al caso de oleaje de mayor grado de linealidad. Notamos que el decaimiento de la energía a través de la zona de rompiente está bien capturado, como indica el ajuste al sensor más cercano a la costa. Luego, la disipación total, calculada desde los datos de video, captura de forma precisa el decaimiento total del flujo de energía incidente.

Los ángulos de roller calibrados muestran poca variabilidad y son consistentes con valores reportados en la literatura (Reniers and Battjes, 1997; Apotsos et al., 1993), como se puede ver en la Tabla 2. Esto sugiere que la escala de los largos de roller obtenidos del video

es consistente y no debe ser compensada por valores poco reales de para reproducir la cantidad necesaria de disipación para ajustar a los valores medidos.

Tabla 2. Ángulos de roller calibrados

Run	θ (°)	ϵ_{abs} (%)
25	11.0	3.56
26	7.5	3.19
27	8.0	0.55
28	8.5	3.59

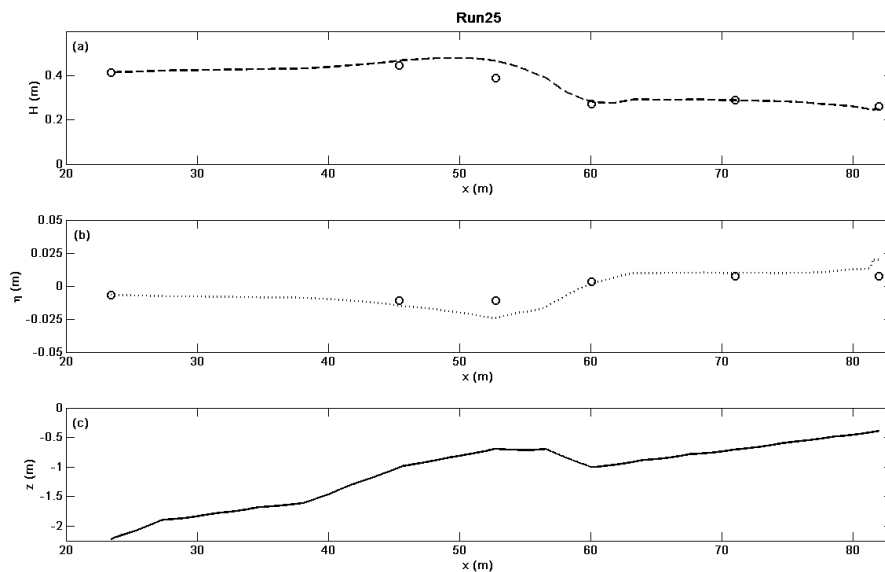


Figura 5. (a) Perfil de altura modelado y valores observados (círculos) (b) Perfil de set-up modelado y valores observados (círculos) (c) Batimetría

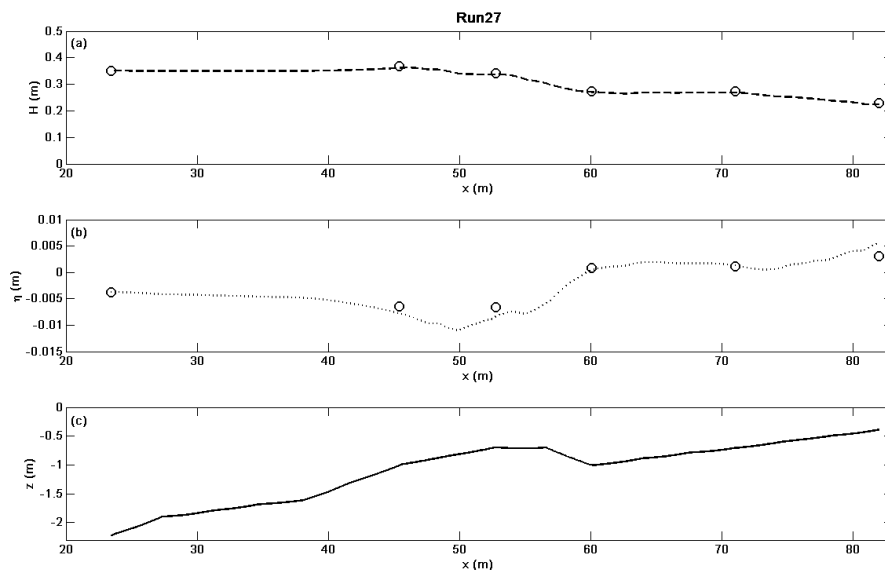


Figura 6. a) Perfil de altura modelado y valores observados (círculos) (b) Perfil de set-up modelado y valores observados (círculos) (c) Batimetría

Los buenos resultados de la metodología sugieren que este enfoque puede ser utilizado para calcular parámetros como la altura de ola y nivel medio cuando los datos de campo son escasos, o para comparar o validar predicciones de modelos.

Para evaluar los beneficios de esta metodología, los resultados se comparan con un modelo de roller en modo de predicción con valores típicos de los parámetros $\theta = 10^\circ$ and $\gamma = 0.42$ (Lippmann et al., 1996). Además, se compara el beneficio de incluir los forzantes del roller en las ecuaciones hidrodinámicas. Para ser consistentes en la comparación, también se utiliza un $\theta = 10^\circ$ en nuestro modelo. Inmediatamente se aprecia una ventaja respecto a modelos propuestos en la literatura, y es que la metodo-

logía aquí propuesta depende de sólo un parámetro, el ángulo de roller, que tiene un rango acotado de variabilidad.

La Figura 7 muestra 3 casos: el modelo de Lippmann (1996), la metodología aquí propuesta sin considerar los forzantes del roller y la metodología propuesta considerando dichos forzantes. Se aprecia claramente que la metodología propuesta muestra mejores resultados tanto en la reproducción de la altura de ola como en el set-up. Inspección al perfil de altura de ola muestra que no hay diferencia entre incluir o no el forzante del roller. Sin embargo, la incorporación de estos forzantes sí hace diferencia en la modelación del set-up, logrando una mejor reproducción particularmente debido al retraso en su iniciación.

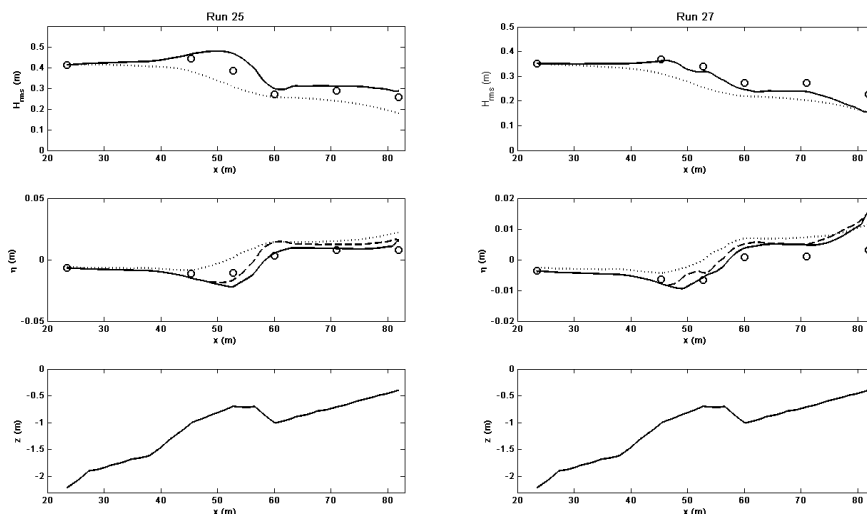


Figura 7. Estimación de parámetros usando modelo de Lippmann (línea punteada), modelo inverso de roller sin considerar esfuerzo de radiación (línea segmentada), modelo inverso de roller completo (línea sólida). (Arriba) altura de ola (Medio) Set-up (Abajo) Batimetría

6. Conclusiones

El presente estudio se centró en el análisis de la señal óptica proveniente de campos de oleaje irregular y en el desarrollo de una metodología para incorporar dicha información en la modelación de parámetros hidrodinámicos como la altura de ola y el nivel medio de la superficie libre. Se encontró que la longitud de roller obtenida desde la señal de video entrega buenos estimadores de las propiedades hidrodinámicas del roller, como su energía, momentum y disipación, probando ser un link físico entre la señal óptica y los procesos costeros.

La metodología desarrollada entregó buenos resultados respecto de alturas de ola y niveles medios, cuando se comparó contra datos

medidos in situ. Además, dichas estimaciones probaron ser más precisas respecto a un modelo clásico de roller sin calibración, probando así ser una alternativa viable cuando no existen datos para calibrar modelos.

Trabajo futuro involucra probar esta metodología con datos de campo, y examinar el potencial de un modelo de inversión total, debido a que celeridades de ola y batimetrías también pueden inferirse desde datos de video. Notamos además que este enfoque puede ser utilizado con sensores remotos de otra naturaleza, o una combinación de ellos, ya que el único requisito es poder extraer la geometría del roller desde las mediciones.

Agradecimientos

Se agradece al Dr. Patricio Catalán, Profesor Guía de la Tesis de Magíster “Medición de disipación en oleaje irregular vía teledetección” en la Universidad Técnica Federico Santa María, de la cual este trabajo forma parte. Además se agradece a FONDECYT (11090201) y a las personas del Coastal Imaging Lab de la Universidad Estatal de Oregon.

Referencias

- Alsina, J. M., and T. E. Baldock, 2007, Improved representation of breaking wave energy dissipation in parametric wave transformation models, *Coastal Eng.*, 54(10), 765-769.
- Apotsos, A., B. Raubenheimer, S. Elgar, R. T. Guza, and J. A. Smith, 2007, Effects of wave rollers and bottom stress on wave setup, *J. Geophys. Res.*, 112(C2), C02003.
- Battjes, J. A., and J. P. F. M. Janssen, 1978, Energy loss and set-up due to breaking in random waves, *Proc. Coastal Eng. Conf.*, 16, 569-587.
- Catalán, P. A., and M. C. Haller, 2008, Remote sensing of breaking wave phase speed with application to nonlinear depth inversion, *Coastal Eng.*, 55, 93-111.
- Dally, W. R., and C. A. Brown, 1995, A modeling investigation of the breaking wave roller with application to cross-shore currents, *J. Geophys. Res.*, 100(C12), 24873-24883.
- Deigaard, R., and J. Fredsoe, 1989, Shear stress distribution in dissipative water waves, *Coastal Eng.*, 13, 357-378.
- Duncan, J., 1981, An experimental investigation of breaking waves produced by a towed hydrofoil, *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 377(1770), 331-348.
- Garcez Faria, A. F., E. B. Thornton, T C. Lippmann, and T. P. Stanton, 2000, Undertow over a barred beach, *J. Geophys. Res.*, 105(C7), 16999-17010.
- Govender, K., G. P. Mocke, and M. J. Alport, 2002, Video-imaged surf zone wave and roller structures and flow field, *J. Geophys. Res.*, 107(C7), 3072.
- Haller, M. C., and P. A. Catalán, 2009, Remote sensing of wave roller lengths in the laboratory, *J. Geophys. Res.*, 114, C07022.

Longuet-Higgins, M. S., and R. W. Stewart, 1964, Radiation stress in water waves; a physical discussion with applications, *Deep Sea Research*, 11, 529-562.

Nairn, R. B., J. A. Roelvink, and H. N. Southgate, 1990, Transition zone width and implications for modeling surf zone hydrodynamics, *Proc. Coastal Eng. Conf.*, 22, 68-81.

Reniers, A. J. H. M., and J. A. Battjes, 1997, A laboratory study of longshore currents over barred and non-barred beaches, *Coastal Eng.*, 30, 1-22.

Stive, M. J. F., and H. G. Wind, 1982, A study of radiation stress and set-up in the nearshore region, *Coastal Eng.*, 6, 1-25.

Stive, M. J. F., and H. J. de Vriend, 1994, Shear stresses and mean flow in shoaling and breaking waves, *Proc. Coastal Eng. Conf.*, 24, 594-608.

Svendsen, I. A., P. A. Madsen and J. B. Hansen, 1978, Wave characteristics in the surfzone, *Proc. Coastal Eng. Conf.*, 16, 520-539.

Svendsen, I. A., 1984a, Wave heights and set-up in a surf zone, *Coastal Eng.*, 8, 303-329.

Svendsen, I. A., 1984b, Mass flux and undertow in a surf zone, *Coastal Eng.*, 8, 347-365.

Thornton, E. B., and R. T. Guza, 1983, Transformation of wave height distribution, *J. Geophys. Res.*, 88(C10), 5925-5938.

Solución numérica de la ecuación de difusión-reacción y ejemplos de aplicación.

Alberto de la Fuente y Paulo Herrera
Departamento de Ingeniería Civil, Universidad de Chile.

1. Introducción

Hoy en día, varios problemas de interés en ingeniería hidráulica involucran el transporte de calor o solutos disueltos en agua. Por ejemplo, la organización mundial de la salud (OMS, 2003) relaciona cambios en la difusión vertical de micro-algas con eventos de florecimiento de algas que potencialmente pueden ser nocivas para la población humana. De igual forma, el uso de energía geotermal consiste en pasar un fluido por un sustrato para extraer el calor del suelo en un proceso difusivo el calor desde el suelo hacia el fluido. Además, los procesos de resuspensión de sedimentos en cuerpos de agua se explican entre el balance entre la difusión vertical de sólidos suspendidos y la sedimentación de los mismos.

En forma general, la ecuación de difusión/reacción unidimensional (1D) que explica la dinámica espacial y temporal de la concentración C de un soluto, se escribe como:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right) \pm r \quad (1)$$

donde D es el coeficiente de difusión ($m^2 s^{-1}$) y r representa un término fuente. El signo que acompaña a r es positivo si es que existe un proceso que produce masa, como por ejemplo la reproducción de algas, producción de O_2 por fotosíntesis o CH_4 por degradación anaeróbica de materia orgánica. Por el contrario, si el signo es negativo nos encontramos en presencia de un proceso que consume masa como por ejemplo, muerte de especies, consumo de O_2 por respiración y quema de metano.

A modo de ejemplo, la ecuación anterior representa el transporte vertical de:

- Calor (Fischer et al 1979):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left((\kappa_t + \kappa) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial H_{sw}}{\partial z} \quad (2)$$

donde T es la temperatura, κ_t y κ son los coeficiente de conducción térmica turbulentos y molecular, respectivamente; ρc_p es la capacidad calorífica, H_{sw} la radiación de onda corta que es función de la elevación z debido a que una fracción de ésta es retenida en la columna de agua.

- Momentum horizontal en grandes cuerpos de agua (Goudsmit et al. 2002):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left((v_t + \nu) \frac{\partial u}{\partial z} \right) + f v \quad (3a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left((v_t + \nu) \frac{\partial v}{\partial z} \right) - f u \quad (3b)$$

donde u y v son las velocidades horizontales en las direcciones x e y , f el coeficiente de Coriolis y v_t y ν las viscosidades turbulentas y molecular, respectivamente.

- Modelo turbulento $k - \varepsilon$ (Rodi 1980, Goudsmit et al. 2002):

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{(v_t + \nu)}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + P + B - \varepsilon \quad (4a)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{(v_t + \nu)}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) + \frac{\varepsilon}{k} (c_{\varepsilon 1} P + c_{\varepsilon 3} B - c_{\varepsilon 2} \varepsilon) \quad (4b)$$

donde σ_k y σ_ε son los números de Schmidt para k y ε , respectivamente; P es el término de producción de energía cinética turbulenta (k) por esfuerzos de corte interno, B es la producción/disipación de k por boyancia, y ε es la tasa de disipación viscosa de k , mientras que $c_{\varepsilon 1}$, $c_{\varepsilon 2}$ y $c_{\varepsilon 3}$ son constantes del modelo.

- Algas acopladas a disponibilidad de nutrientes (Jørgensen and Bendoricchi, 2001):

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D_c \frac{\partial C}{\partial z} \right) + \left(\mu \frac{P}{P_{05} + P} - \mu_l \right) C \quad (5a)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D_p \frac{\partial P}{\partial z} \right) - \left(\mu \frac{P}{P_{05} + P} - \mu_l \right) C \quad (5b)$$

donde C y P representan la concentración de algas y nutrientes, respectivamente. D_c y D_p son los coeficiente de difusión de C y P , respectivamente; μ es la tasa máxima de crecimiento de algas en ausencia de limitación por nutrientes, P_{05} es la constante de saturación, y μ_l es la tasa de pérdidas de biomasa de C producto de muerte de algas o excreción.

- Sedimentos en suspensión (Smith and McLean 1977; Hamilton and Mitchell 1996)

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial C}{\partial z} \right) + w_s C \quad (5a)$$

donde C representa la concentración de sólidos suspendidos en el agua, D es el coeficiente de difusión y w_s la velocidad de sedimentación.

Muchas de estas ecuaciones no tienen o solo admiten soluciones analíticas para casos muy simples, lo que en general deben ser resueltas con métodos numéricos. El objetivo de este trabajo es presentar un breve resumen de pasos necesarios para resolver numéricamente la ecuación de difusión-reacción utilizando un esquema de volúmenes finitos. Además, incluimos una rutina escrita en Matlab© que sirve para formular y resolver el problema numérico, la cual aplicamos para la solución de algunas aplicaciones prácticas las cuales son acompañadas de los respectivos códigos. Más antecedentes respecto de este esquema numérico se pueden encontrar en Patankar (1980) o Versteeg and Malalasekera (1995). Nuestra intención es transferir a la comunidad profesional parte de los contenidos que recientemente fueron incluidos en la malla docente de la carrera de Ingeniería Civil Mención Hidráulica, Sanitaria y Ambiental de la universidad de Chile, como parte del nuevo curso obligatorio Procesos de Transporte en Sistemas Acuáticos. Esperamos que esto sirva para motivar y facilitar que estos conocimiento sean rápidamente incluidos en la actividad profesional.

2. Solución numérica ecuación difusión-reacción

A continuación presentamos un resumen de los pasos necesarios para plantear una solución numérica de la ecuación de difusión en 1D. Para esto consideramos la ecuación de difusión-reacción en 1D,

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right) + r(C) \quad (6)$$

en el dominio $L_W \leq x \leq L_E$, sujeto a la condición inicial $C(x, t=0)=f(x)$ la condición de borde de flujo o tipo Neumann en $x=L_W$

$$-D \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_{x=L_W} = F_o, \quad (7)$$

y la condición de borde de valor o tipo Dirichlet en $x=L_E$,

$$C(x = L_E) = C_o \quad (8)$$

Además, asumimos que el término fuente r es función de C .

Para resolver este problema, utilizaremos el método de volúmenes finito, el cual trabaja con las ecuaciones escritas en forma conservativa para un volumen de control finito. De esta forma, la ecuación diferencial para calcular la concentración del nodo de cálculo P (con $P=1 \dots N$, Figura 1A), se aproxima mediante la siguiente expresión:

$$\Delta x \frac{\partial C_P}{\partial t} = \dot{m}_w - \dot{m}_e + r(C_P) \Delta x \quad (9)$$

donde Δx es el espaciamiento de la grilla, $\dot{m}_w$ y $\dot{m}_e$ son flujos másicos de entrada y salida del volumen de control, y los subíndices e y w indican la dirección de acuerdo a los puntos cardinales en inglés (e =este, w =oeste) de acuerdo a la notación introducida por Patankar (1980). En lo que sigue usaremos las letras minúsculas para hacer referencia a las caras e y w del volumen de control, y las letras mayúsculas E y W a los elementos vecinos (Figura 1B).

Considerando esto, el objetivo del esquema numérico es encontrar un set de N ecuaciones para encontrar el valor de C en cada uno de los N nodos P , y para el tiempo $t + 1$ (CP^{t+1}), dado que se conoce C_P^t , al igual que las condiciones de borde de (7) y (8).

2.1 Definición de dominio de cálculo

Previo continuar con el análisis, es conveniente definir la forma más adecuada de discretizar el espacio en N volúmenes. Dado que el método de volúmenes finitos se centra en identificar los flujos que entran y salen de los mismo, la fronteras del dominio ubicadas en $x = L_W$ y $x = L_E$, deben coincidir con las fronteras de los últimos nodos de cálculo (Figura 1). Es así que el primer nodo ($P=1$) se ubica en $x = L_W + \Delta x/2$, mientras que el último nodo de cálculo ($P=N$) en $x = L_E - \Delta x/2$. De esta forma, obtenemos que el espacio de longitud $L_E - L_W$ se discretiza en N volúmenes de dimensión $\Delta x = (L_E - L_W)/N$, donde cada nodo de cálculo se encuentra en la coordenada $x_P = L_W + (P - 1/2)\Delta x$, con $P = 1 \dots N$.

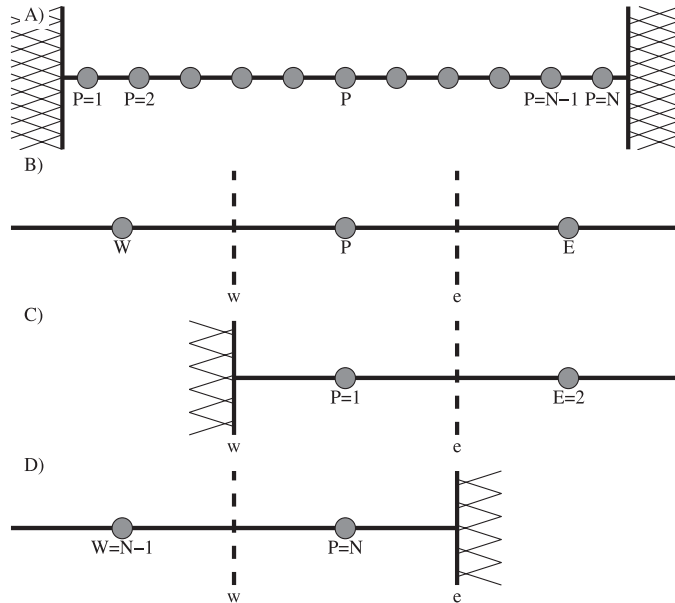


Figura 1: Ejemplo de discretización de espacio según método de volúmenes finitos. Cada nodo P representa el centro de un volumen de control que se utiliza para reescribir la ecuación diferencial que describe el transporte difusivo en términos de la variación de masa en el volumen, y la diferencia de los flujos de entrada y salida en los bordes e y w , más los términos fuentes que corresponden a la creación o destrucción de masa dentro del volumen de control.

2.2 Discretización espacial

Los flujos m_e y m_w son flujos másicos difusivos evaluados en las caras del volumen de control, es decir:

$$\dot{m}_e = -\left(D \frac{\partial C}{\partial x}\right)\bigg|_{x_P + \frac{\Delta x}{2}} ; \quad \dot{m}_w = -\left(D \frac{\partial C}{\partial x}\right)\bigg|_{x_P - \frac{\Delta x}{2}} \quad (10)$$

Entonces, la evaluación de los flujos de entrada y salida requieren una expresión para evaluar las primeras derivadas parciales de la concentración. Para esto es necesario asumir una distribución de la concentración al interior de cada volumen de control, por ejemplo polinomios de distinto orden. La forma más simple de reconstrucción considera una variación lineal (polinomio de orden 1) de C entre C_P y su respectivo vecino C_E o C_W según sea el caso, lo que entrega

$$\dot{m}_e = -\frac{D_e}{\Delta x}(C_E - C_P) \quad (11)$$

y

$$\dot{m}_w = -\frac{D_w}{\Delta x}(C_P - C_W) \quad (12)$$

donde D_e y D_w son los coeficientes de difusión evaluados en las caras e y w , respectivamente. Es posible obtener otras estimaciones para los flujos a partir de reconstrucciones de más alto orden para la variación de concentración de cada volumen de control. Las principales ventajas de la aproximación lineal de C es que es fácil de calcular y satisface continuidad de C y si primera derivada.

Para casos más complejos en los que el coeficiente de difusión varía en función de C , como es por ejemplo el caso de difusión de momentum en un modelo de cierre turbulento, el valor de D en las caras debe ser calculado a partir de los valores de C en los nodos y el polinomio de reconstrucción utilizado. En el caso de la aproximación lineal, es fácil ver que para satisfacer continuidad de flujos en la cara e , se debe cumplir que

$$\frac{1}{D_e} = \frac{1}{D_E} + \frac{1}{D_P} \quad (13)$$

donde D_E y D_P son los valores calculados a partir de C_E y C_P , respectivamente.

2.3 Condiciones de Borde

Sustituyendo las expresiones para evaluar los flujos de entrada y salida de acuerdo a la formulación de primer orden de los gradientes de C en la Eq. (9), se obtiene una forma discreta de la Ecuación (1) la cual permite calcular C_P para cualquier nodo P al interior de la grilla (i.e. $P = 2 \dots N - 1$), de acuerdo:

$$\frac{\partial C_P}{\partial t} = \frac{1}{\Delta x^2} (D_w C_W - (D_w + D_e) C_P + D_e C_E) + r(C_P) \quad (14)$$

Como los nodos de cálculo están centrados en el centro de cada volumen de control, para el nodo $P = 1$ (Figura 1C), el flujo másico de salida m_e se escribe de acuerdo a (11), mientras que la condición de borde de Neumann impone que el flujo másico $m_w = F_o$. Esto lleva a que la ecuación para resolver C_1 es

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = \frac{D_e}{\Delta x^2} (C_E - C_P) + \frac{F_o}{\Delta x} + r(C_1) \quad (15)$$

Para el nodo P_N donde se desea imponer la condición de borde (8) (Figura 1D), el flujo másico de entrada m_w se calcula con (12), mientras que el flujo másico de salida m_e se aproxima como

$$\dot{m}_e|_{x=L_E} = -\frac{2D_e}{\Delta x} (C_o - C_P) \quad (16)$$

donde el factor 2 se obtiene de reconocer que la distancia entre P y la frontera es $\Delta x / 2$. Reemplazando en (9) se obtiene la siguiente expresión para evaluar C_N :

$$\frac{\partial C_N}{\partial t} = \frac{1}{\Delta x^2} (D_w C_{N-1} - (D_w + 2D_e) C_N) + \frac{2D_e}{\Delta x^2} C_o + r(C_N) \quad (17)$$

2.4 Formulación Matricial

Es conveniente reescribir el sistema de N ecuaciones para cada modo P , de forma matricial para obtener el sistema lineal:

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} = \mathbf{M} \mathbf{C} + \mathbf{b} + r(\mathbf{C}) \quad (18)$$

donde $\mathbf{C}$ es un vector columna que contiene los valores de la concentración en los nodos de cálculo $\mathbf{C} = [C_1, C_2, \dots, C_{N-1}, C_N]^T$, donde el superíndice T indica un vector o matriz transpuesta; $r(\mathbf{C})$ es un vector columna que contiene los términos fuentes evaluados en los nodos, y $\mathbf{b}$ es un vector columna que contiene los términos asociados a las condiciones de borde

$$\mathbf{b} = \left[\frac{F_o}{\Delta x}, 0, \dots, 0, \frac{2D_e}{\Delta x^2} \right]^T \quad (19)$$

Finalmente, $\mathbf{M}$ es una matriz de $N \times N$ elementos tal que al ser multiplicada por $\mathbf{C}$ entrega los términos asociados a la discretización espacial de los flujos máxicos de entrada y salida del volumen de control. Es fácil demostrar que para el caso 1D la matriz $\mathbf{M}$ es tridiagonal, con coeficientes distintos de 0 en su diagonal principal, y las dos diagonales adyacentes. Los coeficientes de la diagonal corresponden a

$$\mathbf{a}_P = -\frac{1}{\Delta x^2} [D_e, D_e + D_w, \dots, D_e + D_w, 2D_e + D_w]^T \quad (20)$$

Mientras que los coeficientes de la diagonal superior asociada a los nodos E contiene el vector de largo $N - 1$

$$\mathbf{a}_E = \frac{1}{\Delta x^2} [D_e, D_e, \dots, D_e, D_e]^T \quad (21)$$

y la diagonal inferior asociada a los nodos W , el vector de largo $N - 1$

$$\mathbf{a}_W = \frac{1}{\Delta x^2} [D_w, D_w, \dots, D_w, D_w]^T \quad (22)$$

La matriz $\mathbf{M}$ tiene algunas características importantes de ser destacadas. La primera es que, como se mencionó anteriormente, es una matriz tridiagonal predominantemente llena de valores 0. Este tipo de matriz se conoce como matriz sparse, y aparece frecuentemente en la formulación de aproximaciones numéricas basadas no solo en volúmenes finitos; sino que también en elementos finitos y diferencias finitas. Desde el punto de vista computacional las matrices de este tipo permiten ahorrar memoria dado que solo es necesario almacenar los coeficientes distintos de cero, además permitir la utilización de una serie de algoritmos eficientes especialmente diseñados para su manipulación algebraica. Además, los coeficientes de la matriz $\mathbf{M}$ en la diagonal principal tienen signo contrario a los valores en las diagonales vecinas, lo que indica que es una matriz estable al ser invertida.

2.5 Discretización temporal

Existen varios esquemas numéricos para evaluar de resolver temporalmente la ecuación (18). Entre los más comunes se encuentran:

- Método explícito de primer orden. En este caso el término temporal de (18) se aproxima como

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} \approx \frac{(\mathbf{C}^{t+1} - \mathbf{C}^t)}{\Delta t} \quad (23)$$

y evalúa todos los términos en el lado derecho de (18) asociados a los flujos en el tiempo t . De esta forma es posible reescribir (18) como

$$\mathbf{C}^{t+1} = \mathbf{C}^t + \Delta t (\mathbf{M} \mathbf{C}^t + \mathbf{b} + r(\mathbf{C}^t)) \quad (24)$$

Este método es condicionalmente estable para valores de $\Delta t \tilde{D}/\Delta x^2 < 0.5$ donde $\tilde{D}$ es un valor característico de D . Dado Δx usualmente queda determinado por la resolución espacial del cálculo que se desea, el criterio de estabilidad condiciona el valor de Δt . Para algunos problemas, la condición de estabilidad puede ser demasiado restrictiva lo que se traduce en requerimientos computacionales en términos de memoria y tiempo que pueden ser excesivamente altos. Además, por ser una aproximación de primer orden presenta baja precisión para resolver términos. La ventaja del método explícito es que es de fácil implementación, por ejemplo es fácil de implementar en una planilla de cálculo ya que permite evaluar $\mathbf{C}^{t+1}$ a partir de:

$$C_P^{t+1} = C_P^t + \Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} (D_e C_E^t - (D_e + D_w) C_P^t + D_w C_W^t) + r(C_P^t) + b_P \right) \quad (25)$$

- Método Runge-Kutta de cuarto orden. Este método es un esquema explícito de mayor orden, y contempla resolver un problema del tipo:

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} = f(\mathbf{C}, t) \quad (26)$$

donde f es una función cualquiera que depende de $\mathbf{C}$ y t . En particular es posible utilizarlo para evaluar (18) definiendo,

$$f(\mathbf{C}, t) = \mathbf{M} \mathbf{C} + \mathbf{b} + r(\mathbf{C}) \quad (27)$$

En problemas de transporte en sistemas acuáticos, la dependencia temporal de la función f se reduce a variaciones en el vector de condiciones de borde $\mathbf{b}$.

El método de Runge-Kutta permite calcular el valor de la concentración en un tiempo $t + 1$ en función del valor en el tiempo t e intervalos intermedios de acuerdo a:

$$\mathbf{C}^{t+1} = \mathbf{C}^t + \frac{\Delta t}{6} (\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \quad (28)$$

donde

$$\mathbf{k}_1 = f(\mathbf{C}^t, t) \quad (29a)$$

$$\mathbf{k}_2 = f\left(\mathbf{C}^t + \frac{\mathbf{k}_1 \Delta t}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}\right) \quad (29b)$$

$$\mathbf{k}_3 = f\left(\mathbf{C}^t + \frac{\mathbf{k}_2 \Delta t}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}\right) \quad (29c)$$

$$\mathbf{k}_4 = f(\mathbf{C}^t + \Delta t \mathbf{k}_3, t + \Delta t) \quad (29d)$$

Al igual que el método explícito, el término difusivo es condicionalmente estable para valores de $\Delta t \tilde{D} \Delta x^{-2} \leq 0.5$. Sin embargo, esta aproximación temporal permite una buena precisión para calcular términos fuentes.

- Método implícito. Este método considera una discretización temporal de primer orden similar a (23), pero evalúa el término que acompaña a $\mathbf{M}$ en el tiempo $t + 1$. Es así que este problema en ausencia del término fuente se escribe de la forma $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$, como

$$(\mathbf{I} + \Delta t \mathbf{M}) \mathbf{C}^{t+1} = \mathbf{C}^t + \Delta t \mathbf{b} \quad (30)$$

donde " $\mathbf{I}$ " es la matriz identidad de $N \times N$ elementos. La concentración " $\mathbf{C}^{(t+1)}$ " se obtiene al pre-multiplicar por la matriz inversa de " $(\mathbf{I} + \Delta t \mathbf{M})$ ", obteniéndose

$$\mathbf{C}^{t+1} = (\mathbf{I} + \Delta t \mathbf{M})^{-1} (\mathbf{C}^t + \Delta t \mathbf{b}) \quad (31)$$

A diferencia de los métodos anteriores, el método implícito es incondicionalmente estable, lo que permite aumentar el paso de tiempo Δt para lograr resolver problemas que modelan períodos largos de tiempo. Por otra parte, la aplicación directa de (31) requiere invertir una matriz lo que puede ser computacionalmente costoso y cuya implementación de forma eficiente es, en general, difícil de realizar. Esta es la principal razón por lo cual muchas herramientas computacionales de uso profesional, evitan evaluar (31), y en vez de eso buscan una solución aproximada de (30) a través de métodos iterativos. Independiente del método de solución que se utilice para encontrar $\mathbf{C}^{t+1}$, su implementación es más compleja y computacionalmente costosa que en el caso de las aproximaciones explícitas por lo que no es aconsejable utilizar una planilla de cálculo para resolverla por lo que se recomienda utilizar funciones o librerías específicamente diseñadas para resolver este tipo de problemas y que han sido implementadas en lenguajes de programación tales como Matlab, Fortran o C/C++. En el caso de Matlab la solución $\mathbf{x}$ de un problema $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ se puede obtener mediante $\mathbf{A} \backslash \mathbf{b}$ (también existen otras alternativas que pueden ser más eficientes dependiendo del problema que se desee resolver. En Fortran y C/C++ recomendamos usar la librería de libre acceso UMFPACK la cual implementa un método de solución directo para resolver (30) que explota la estructura sparse de la matriz, o alguna librería que proporcione métodos iterativos basados en subespacios de Krylov, tales como CG (Conjugate Gradiente), BiCG, GMRES, etc. En general, no existe una "receta" para escoger entre un método directo o iterativo para resolver el sistema matricial dado por (30), por lo que se debe experimentar con ambos métodos para seleccionar el que mejor se ajuste a los requerimientos del proyecto o problema que se desee resolver.

2.6 Término fuente en método implícito

En caso de implementar un método implícito, es conveniente linealizar los términos fuentes para satisfacer criterios de estabilidad, vale decir,

$$r(\mathbf{C}^{t+1}) = \mathbf{f}_1 \mathbf{C}^{t+1} + \mathbf{f}_0 \quad (32)$$

donde $\mathbf{f}_1$ es una matriz diagonal y $\mathbf{f}_0$ un vector columna. Esta linearización se puede hacer usando la expansión en Taylor de $r(\mathbf{C}^{t+1})$ en torno a $r(\mathbf{C}^t)$, como

$$r(\mathbf{C}^{t+1}) \approx r(\mathbf{C}^t) + \text{diag}\left(\left.\frac{dr}{dC}\right|_{\mathbf{C}^t}\right)(\mathbf{C}^{t+1} - \mathbf{C}^t) \quad (33)$$

donde $\text{diag}(\mathbf{x})$ hace referencia a la matriz que en su diagonal principal contienen al vector $\mathbf{x}$. Reemplazando en (32) y reconociendo términos, se obtiene que

$$\mathbf{f}_1 = \text{diag}\left(\left.\frac{dr}{dC}\right|_{\mathbf{C}^t}\right) \quad (34)$$

y

$$\mathbf{f}_0 = r(\mathbf{C}^t) - \text{diag}\left(\left.\frac{dr}{dC}\right|_{\mathbf{C}^t}\right)\mathbf{C}^t \quad (35)$$

Finalmente, al reemplazar la linearización del término fuente en (18), el problema se reduce a una formulación lineal $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ de la forma

$$(\mathbf{I} + \Delta t(\mathbf{M} + \mathbf{f}_1))\mathbf{C}^{t+1} = \mathbf{C}^t + \Delta t(\mathbf{b} + \mathbf{f}_0) \quad (36)$$

2.7 Acoplamiento entre múltiples compuestos

En muchas aplicaciones de interés práctico ocurre el caso que existen varios compuestos que son transportados producto de un proceso difusivo, y que reaccionan entre sí. Esto da origen a un problema de transporte acoplado entre los distintos solutos. En el caso de dos solutos con concentraciones A y B , este problema lo podemos formular como:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D_A \frac{\partial A}{\partial x}\right) + r_A(A, B) \quad (37a)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D_B \frac{\partial B}{\partial x}\right) + r_B(A, B) \quad (37b)$$

donde D_A y D_B son los coeficientes de difusión de A y B , respectivamente; y r_A y r_B los términos de reacción, los que dependen de la concentración de A y B . En caso que no exista esta dependencia, la dinámica de A sería desacoplada de la dinámica de B y el problema se reduce al transporte de dos

solutos de forma independiente.

Para resolver de forma simultánea el sistema de ecuaciones formado por la discretización espacial de (37a) y (37b), utilizaremos la aproximación espacial explicada precedentemente junto a un esquema implícito para la aproximación temporal. Para implementar este esquema de solución es necesario linealizar r_A y r_B :

$$\begin{aligned} r_A(\mathbf{A}^{t+1}, \mathbf{B}^{t+1}) &\approx r_A(\mathbf{A}^t, \mathbf{B}^t) + \text{diag}\left(\frac{dr_A}{dA}\bigg|_{\mathbf{A}^t, \mathbf{B}^t}\right)(\mathbf{A}^{t+1} - \mathbf{A}^t) \\ &\quad + \text{diag}\left(\frac{dr_A}{dB}\bigg|_{\mathbf{A}^t, \mathbf{B}^t}\right)(\mathbf{B}^{t+1} - \mathbf{B}^t) \end{aligned} \quad (38)$$

Y

$$\begin{aligned} r_B(\mathbf{A}^{t+1}, \mathbf{B}^{t+1}) &\approx r_B(\mathbf{A}^t, \mathbf{B}^t) + \text{diag}\left(\frac{dr_B}{dA}\bigg|_{\mathbf{A}^t, \mathbf{B}^t}\right)(\mathbf{A}^{t+1} - \mathbf{A}^t) \\ &\quad + \text{diag}\left(\frac{dr_B}{dB}\bigg|_{\mathbf{A}^t, \mathbf{B}^t}\right)(\mathbf{B}^{t+1} - \mathbf{B}^t) \end{aligned} \quad (39)$$

por lo tanto, podemos escribir $r_A(\mathbf{A}^{t+1}, \mathbf{B}^{t+1})$ como

$$r_A(\mathbf{A}^{t+1}, \mathbf{B}^{t+1}) = \mathbf{f}_{oA} + \mathbf{f}_{AA}\mathbf{A}^{t+1} + \mathbf{f}_{AB}\mathbf{B}^{t+1} \quad (40)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{AA} &= \text{diag}\left(\frac{dr_A}{dA}\bigg|_{\mathbf{A}^t, \mathbf{B}^t}\right); \mathbf{f}_{AB} = \text{diag}\left(\frac{dr_A}{dB}\bigg|_{\mathbf{A}^t, \mathbf{B}^t}\right); \\ \mathbf{f}_{oA} &= r_A(\mathbf{A}^t, \mathbf{B}^t) - \mathbf{f}_{AA}\mathbf{A}^t - \mathbf{f}_{AB}\mathbf{B}^t \end{aligned} \quad (41)$$

Análogamente, r_B se escribe

$$r_B(\mathbf{A}^{t+1}, \mathbf{B}^{t+1}) \approx r_B(\mathbf{A}^t, \mathbf{B}^t) + \mathbf{f}_{BA}(\mathbf{A}^{t+1} - \mathbf{A}^t) + \mathbf{f}_{BB}(\mathbf{B}^{t+1} - \mathbf{B}^t) \quad (42)$$

Con

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{BA} &= \text{diag} \left(\left. \frac{dr_B}{dA} \right|_{A^t, B^t} \right); \mathbf{f}_{BB} = \text{diag} \left(\left. \frac{dr_B}{dB} \right|_{A^t, B^t} \right); \\ \mathbf{f}_{oB} &= r_B(\mathbf{A}^t, \mathbf{B}^t) - \mathbf{f}_{BA}\mathbf{A}^t - \mathbf{f}_{BB}\mathbf{B}^t \end{aligned} \quad (43)$$

De esta forma, las ecuaciones discretas para evaluar $\mathbf{A}^{t+1}$ y $\mathbf{B}^{t+1}$, quedan finalmente escritas como:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{I} - (\mathbf{M}_A + \mathbf{f}_{AA})\Delta t) & -\mathbf{f}_{AB} \\ -\mathbf{f}_{BA} & (\mathbf{I} - (\mathbf{M}_B + \mathbf{f}_{BB})\Delta t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{t+1} \\ \mathbf{B}^{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^t + \Delta t(\mathbf{b}_A + \mathbf{f}_{oA}) \\ \mathbf{B}^t + \Delta t(\mathbf{b}_B + \mathbf{f}_{oB}) \end{bmatrix} \quad (44)$$

donde $\mathbf{M}_A$, $\mathbf{M}_B$, $\mathbf{b}_A$ y $\mathbf{b}_B$ son las matrices que representan la discretización espacial de los flujos másicos y las condiciones de borde. El resultado de (44) nuevamente corresponde a un problema lineal de la forma $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$, pero en este caso de $2N$ variables que corresponden a los valores de concentración de A y B evaluados en los nodos N de la grilla numérica.

3. Ejemplos de implementación numérica

La Tabla 1 propone una rutina implementada en Matlab© para calcular las matrices $\mathbf{M}$, $\mathbf{I}$, y el vector $\mathbf{b}$, dado el vector $\mathbf{D}$ que contiene los coeficientes de difusión en las $N + 1$ caras de los N volúmenes en que se divide el dominio de simulación, los valores característicos de la discretización numérica Δx , el vector CB de dos elementos que contiene caracteres ‘n’ (Neumann) o ‘d’ (Dirichlet) según sea la condición de borde aplicada en $x = L_W$ y L_E , y el vector vCB de dos elementos que contiene el valor de F_o o C_o según sea la condición de borde requerida.

```
function [M,I,b]=def_matVF(N,D,dx,CB,vCB);
% [M,I,b]=def_matVF(N,D,dx,CB,vCB);
% N Numero de elementos
% D Coeficiente de difusion (m^2 s^-1)
% dx (m)
% CB dos caracteres 'n' o 'd' según si CB es de Neumann o Dirichlet.
% por ejemplo CB {'d' 'n'}
% vCB Valor de cantidad fisica F_o o C_o de condición de borde
% internamente calcula b1 y bN como Fo/dx o 2D/dx^2 Co segun sea la
% condicion de borde de Neumann o Dirichlet, respectivamente.
% F_o es un vector positivo si es según x
%
% M Matriz M
% I Matriz identidad
% b Vector b con condiciones de borde
% *****
% Licence GNU GPLv3.0 (http://www.gnu.org/licenses/)
% Copyright 2013 Alberto de la Fuente S. & Paulo Herrera R.
% Apuntes del curso CI6101, Procesos de Transporte en
% Sistemas Acuáticos
% Departamento de Ingeniería Civil
% Universidad de Chile
% email: aldelafu@ing.uchile.cl
% email: pherrera@ing.uchile.cl

b=zeros(N,1);
De=D(2:end);
Dw=D(1:end-1);
ap=(De+Dw);
ae=De;
aw=Dw;

if char(CB(1))=='n'
    ap(1)=De(1);
    b(1)=vCB(1)/dx;
end
if char(CB(1))=='d'
    ap(1)=(2*Dw(1)+De(1));
    b(1)=2*vCB(1)*Dw(1)/dx^2;
end

if char(CB(2))=='n'
    ap(N)=Dw(N);
    b(N)=-vCB(2)/dx;
end
if char(CB(2))=='d'
    ap(N)=(Dw(N)+2*De(N));
    b(N)=2*vCB(2)*De(N)/dx^2;
end

i=(1:N);
I=[i,i(1:N-1);i(2:end)];
J=[i,i(1:end-1)+1;i(2:end)-1];
Mij=[-ap;ae(1:end-1);aw(2:end)];
M=1/dx^2*sparse(I,J,Mij);
I=sparse(i,i,ones(N,1));
```

Tabla 1: Rutina Matlab para definición de matrices **M**, **I**, y el vector **b**, dado que se entrega el vector **D** que contiene los coeficientes de difusión en las $N + 1$ caras, los valores característicos de la discretización numérica Δx y N , el vector CB de dos elementos que contiene caracteres 'n' (Neumann) o 'd' (Dirichlet) según sea la condición de borde aplicada en $x = L_W$ y L_E , y el vector vCB de dos

elementos que contiene el valor de F_o o C_o según sea la condición de borde requerida. En caso de condición de borde de Neumann, F_o es un vector positivo si es según x . Este rutina asume que los parámetros de entrada son correctos y satisfacen las condiciones discutidas en este artículo, por lo que no contempla ninguna forma de verificación de los argumentos.

El uso de esta rutina para estudiar problemas de interés práctico se ejemplifica con los siguientes dos problemas: placa oscilatoria, y oscilación térmica en lagunas someras.

3.1 Placa oscilatoria.

El primer problema que analizaremos es el conocido como segundo problema de Stokes, el cual consiste en un flujo de un fluido viscoso inducido por el movimiento oscilatorio de una placa. Entre otros, el segundo problema de Stokes se utiliza para representar el perfil de velocidades inducido por el oleaje, los problemas de resuspensión de sedimentos asociados, el transporte estacional de calor en el suelo, o el intercambio de calor entre agua y sedimentos en lagos y embalses.

Este problema se puede modelar como un problema de difusión en 1D con condiciones de borde de Dirichlet periódica en $x = 0$ ($C = C_o \cos(\omega t)$), flujo nulo en $x = \infty$. En los casos listados anteriormente, C representa la velocidad inducida por el oleaje, o temperatura del suelo o sedimentos. Si el coeficiente de difusión (D) es constante, la solución analítica de este problema está dada por:

$$C(x, t) = C_o \exp(-\alpha x) \cos(\alpha x - \omega t) \quad (45)$$

donde $\alpha = \sqrt{(\omega/2D)}$. Mayores detalles de la derivación de esta solución pueden ser encontrados en Batchelor (1967).

La resolución numérica de este problema no es posible para un dominio infinito como es la solución analítica, por lo que acotaremos la dimensión del dominio x a 2 veces la longitud característica de problema dada por $l = 2\pi / \alpha$. En $x = 2l$ se considera la condición de borde de flujo nulo ($F_o = 0$), y el problema se resuelve sujeto a la condición inicial $C = 0$. Además, se resuelve para 5 ciclos de oscilación que tienen un período $T = 20s$, con un coeficiente de difusión arbitrario $D = 1m^2s^{-1}$, y $\Delta t = 1s$ y $\Delta x = 2l/50$.

La estructura del código comienza con la definición de las variables y dominio según:

```
clear all
close all
T=20; %Período de oscilación
omega=2*pi/T; %Cálculo de frecuencia de oscilación
Do=1; %Coeficiente de difusión
alpha=sqrt(omega/2/Do); %Cálculo de parámetro alpha

L=2*pi/alpha; % Cálculo de largo del dominio
dx=L/50; % Cálculo de dx

%definición de vector de posición x de nodos. Comenzando en x=dx/2, espaciado en
% dx, y termina en L-dx/2;. Ver Figura 1.

x=dx/2:dx:L-dx/2;

Co=1; %Valor de Co

dt=T/20; %cálculo de dt

%definición de vector de tiempos de cálculo. Comenzando en t=0, espaciado en
% dt, y termina en t=5T.
t=0:dt: 5*T;

%Cálculo de número de pasos de tiempos a resolver
Ttotal=length(t);

%Cálculo de N
N=length(x);

%Definición de vector D con coeficientes de difusión en las N+1 caras del dominio.
D=Do*ones(N+1,1);

Posteriormente se define la condición inicial que corresponde a un valor nulo de  $C$  en todo
el dominio, como:

C=zeros(N,1);

Finalmente, se utiliza un for para resolver  $C$  en el tiempo en forma implícita. Como la
condición de borde de Dirichlet varían en el tiempo, se debe llamar la rutina def_matVF en
cada paso de tiempo.

for k=1:Ttotal
% se llama la rutina def_matVF, definiendo que la CB en x=0 será de Dirichlet ('d')
% con un valor Co*cos(omega*t(k)), y la CB en x=L es Neumann ('n') con flujo nulo.
% Como resultado, la rutina entrega las matrices M e I, y el vector b.
[M,I,b]=def_matVF(N,D,dx,{'d', 'n'},[Co*cos(omega*t(k)), 0]);

% Cálculo de C para tiempo t+1. Note que la variable C se reescribe
C=(I-dt*M)\(b*dt+C);
```

En un comienzo la solución está influenciada por la condición inicial del problema, pero al cabo de 2 ciclos se alcanza un régimen estacionario, donde la solución para un ciclo es igual a la del ciclo siguiente. La Figura 2a muestra el valor de los perfiles simulados de C para $t = [0, T/4, T/2, 3/4T]$, y la comparación con la solución analítica para los mismos tiempo. Aún cuando la solución numérica se aproxima bastante a la solución analítica, existe un error de cálculo definido como

$$error(t) = \frac{1}{NC_o} \sum \left(C_i^k - C_a(x_i, t_k) \right)^2 \quad (46)$$

donde C_i^k es la concentración simulada para el nodo i para el paso de tiempo k , y $C_a(x_i, t_k)$ la solución analítica evaluada en x_i y el tiempo t_k . La evolución temporal del error se grafica en la Figura 2b, donde se aprecia que inicialmente el error es grande, producto de la influencia de la condición inicial, y posteriormente disminuye hasta un valor aproximado de 0.012. También se observa que el error oscila, y toma valores máximos para la velocidad de la placa es máxima. Se deja al lector el análisis de cómo varía este error si se varía el valor de Δx o Δt .

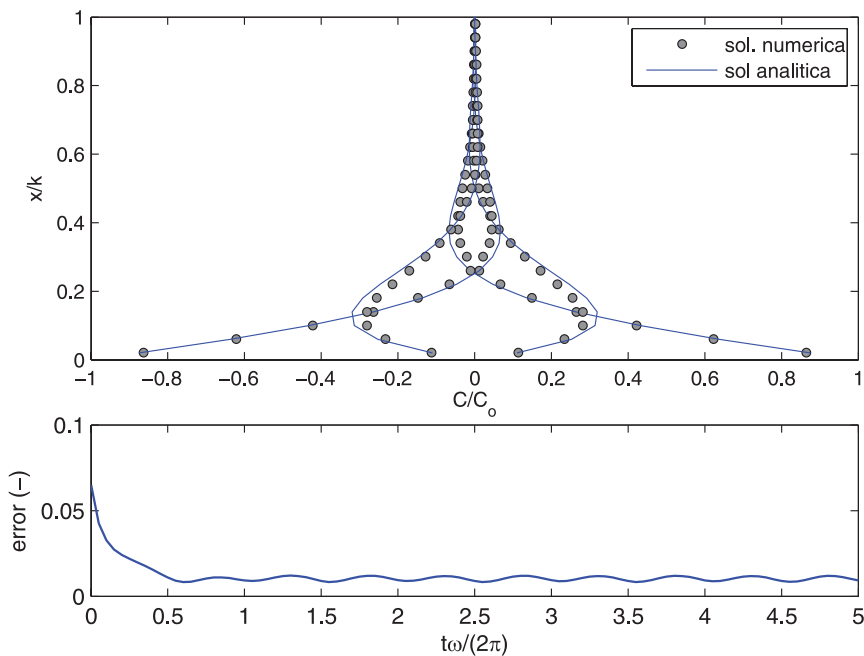


Figura 2: A) perfiles simulados y teóricos del segundo problema de Stokes , B) serie de tiempo de error en solución numérica.

3.2 Oscilación térmica en lagunas someras.

La temperatura de grandes cuerpos de agua como lagos, embalses y el océano queda determinada por el intercambio de calor con la atmósfera. En la superficie libre se tienen 4 tipos de flujos de calor intercambiados entre el agua y la atmósfera: radiación solar de onda corta, radiación neta de onda larga, y flujos de calor sensibles asociados a la difusión térmica, y latente asociado a la evaporación. Por una parte, la radiación solar de onda corta es un término fuente que siempre entrega calor y produce el aumento de la temperatura del cuerpo de agua. Por otro lado, la radiación neta de onda larga se explica en la radiación de cuerpo negro descrita por Stefan-Boltzmann, y es la resultante de la radiación incidente al cuerpo de agua que es emitida por la atmósfera, y la radiación emitida por el cuerpo de agua hacia la atmósfera. Finalmente, los flujos de calor latente y sensible son flujos difusivos de vapor de agua y calor, que se ven potenciados por la acción del viento (Garrratt 1992; Bogan et al 2003).

A diferencia de lo que ocurre en lagos, embalses o el océano, el balance radiativo en lagunas someras como las que se encuentran en los Salares Altiplánicos está fuertemente condicionado por la interacción entre el agua y los sedimentos (de la Fuente and Niño 2010). En particular, los sedimentos actúan como un reservorio de calor que lo retienen durante el día y liberan durante la noche, amortiguando así la oscilación térmica intradiaria.

El calor intercambiado entre el agua y los sedimentos se describe como un flujo difusivo proporcional a – el gradiente vertical de temperatura. Es por esto que la interacción agua-sedimentos se cuantifica mediante un proceso difusivo de calor el cual se puede modelar como:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D_T(z) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial H_{sw}}{\partial z} \quad (47)$$

donde T es la temperatura, el eje de coordenadas z está centrado en la interfaz agua-sedimentos y D_T es el coeficiente de difusión térmica. H_{sw} es la radiación solar de onda corta incidente que puede penetrar en el agua, por lo que su derivada representa el calor absorbido en la columna de agua. Considerando un dominio continuo que incluye los sedimentos y el agua, el problema se puede modelar considerando variaciones espaciales de los coeficientes de difusión: en los sedimentos se considera un valor constante y uniforme igual a $0.035 \text{ m}^2 \text{ d}^{-1}$ (Fang and Stefan 1998), mientras que en la columna de agua $D_T(z) = D_t(z) + D$, con $D = 0.014 \text{ m}^2 \text{ d}^{-1}$ el coeficiente de difusión molecular en el agua, y $D_t(z)$ es el coeficiente de difusión turbulenta, que se calcula asumiendo un perfil logarítmico de velocidades (Fischer et al 1979):

$$D_t(z) = \kappa \frac{z}{H} \left(1 - \frac{z}{H}\right) u_* H \quad (48)$$

con $\kappa = 0.41$, u_* la velocidad de corte y H la profundidad de escurrimiento. Para este ejemplo asumimos $u_* = \sqrt{gHi}$ donde $i = 1 \times 10^{-4}$ es la pendiente de terreno y $H = 5cm$.

Por otro lado, asumimos que el calor asociado a la radiación solar de onda corta es uniformemente retenido en la columna de agua, lo que permite obtener que el término fuente que actúa en la columna de agua se calcula como:

$$\frac{\partial H_{sw}}{\partial z} = \frac{H_{swo}}{H} \max(0, \sin \omega t) \quad (49)$$

con $H_{swo} = 1200 \text{ Wm}^{-2}$ la radiación solar de onda corta incidente en la superficie libre del agua, y el término $\max(0, \sin \omega t)$ permite la variación diaria de la radiación solar incidente. Finalmente $\rho c_p = 4.4 \times 10^6 \text{ Jm}^{-3} \text{ } ^\circ\text{K}$.

En los sedimentos, se simula un dominio hasta $z = -1m$, donde se considera la condición de borde adiabática. Por otro lado, en la superficie libre ubicada en $z = H$, no es posible considerar la misma condición de borde, ya que en tal caso se tendría un aumento constante de la temperatura del agua. En estricto rigor, en $z = H$ se debiera considerar una condición de borde de tipo Neumann que considere todos los flujos radiativos intercambiados con la atmósfera (onda corta incidente y emitida, calor latente y calor sensible), sin embargo, por simplicidad consideraremos solo la emisión de cuerpo negro dada por:

$$F_o(t) = \varepsilon_w \sigma T_s^4 \quad (50)$$

donde $\varepsilon_w = 0.97$ es la emisividad del agua, σ la constante de Stefan Boltzman, y T_s la temperatura en la superficie del agua, medida en grados Kelvin. Luego, asumimos que la temperatura en la superficie libre es igual a la temperatura en el último nodo de cálculo, que según la Figura 1 está ubicado en $z = H - \Delta z / 2$. Entonces, se puede demostrar que el problema queda escrito de la forma

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} = \mathbf{M} \mathbf{T} + \mathbf{b} \quad (51)$$

donde el vector $\mathbf{b}$ corresponde a un término fuente que debe ser linealizado en torno al valor simulado para el tiempo anterior, como

$$F_o = \varepsilon_w \sigma (T_N^{t-1})^3 (4T_N^t - 3T_N^{t-1}) \quad (52)$$

donde $T_N^{(t-1)}$ es la temperatura simulada en el tiempo de cálculo anterior ($t-1$), y T_N^t la temperatura simulada para el tiempo de cálculo t . De esta forma, parte de la condición de borde modifica el valor de la matriz "M" y la otra, es efectivamente un término fuente que afecta el vector $\mathbf{b}$. En particular, el término $-4\varepsilon_w \sigma (T_N^{(t-1)})^3 / \Delta z$ se agrega en la diagonal principal "M", en el último nodo N, y $3\varepsilon_w \sigma (T_N^{(t-1)})^4$ al vector $\mathbf{b}$. El signo negativo del término que suma a la matriz "M" se explica en que los flujos de las caras e de (9) son salidas de los volúmenes de control.

La implementación numérica de este problema comienza con la definición del dominio y constantes del problema

```
clear all;
close all;

% Parámetros de entrada
ew=0.97;
sigma=5.670373E-8;
dz=1/1000;
H=5/100;
us=sqrt(9.81*H*1E-4);
z=-1+dz/2:dz:H-dz/2;
n=length(z);
rhocp=4.4E6;
Hi=1200/rhocp;
dt=3600;
Dwat=1.15E-6/7;
Dsed=0.035/86400;
omega=2*pi/86400;
t=0:dt:30*86400;

% Vectores para definir el volumen del dominio ocupado por los sedimentos y el agua
```

```
idsed=find(z<0);
idwat=find(z>0);

% Evaluación del coeficiente de dispersión turbulenta de Eq. (48)
nut=0.41*z(idwat)/H.*(1-z(idwat)/H)*us*H;
D=[Dsed*ones(size(idsed)),Dwat+nut]';
D=[D(1);2./(1./D(2:end)+1./D(1:end-1));D(end)];

S=zeros(size(z))';
S(idwat)=1/H;
```

Luego se imponen las condiciones iniciales del problema que corresponden a una temperatura uniforme de 12.75°C que se obtiene del balance radiativo promedio diario.

```
T=(12.75+273.25)*ones(size(z))';
```

Para finalmente entrar en el ciclo *for* del tiempo.

```
for k=1:length(t)
    [M,l,b]=def_matVF(n,D,dz,{ 'n', 'n'},[0 -3*ew*sigma*T(n)^4/(rhocp)]);
    M(n,n)=M(n,n)-4*ew*sigma*T(n)^3/(rhocp*dz);
    b=(b*dt+T+S*max(Hi*sin(omega*t(k))*dt,0));
    T=(l-dt*M)\b;
end
```

La Figura 3a muestra la serie de radiación solar incidente al cuerpo de agua, y la Figura 3b la temperatura del agua promedio para los últimos 5 días de simulación, cuando la solución es independiente de la condición inicial. La línea azul representa la temperatura media del agua calculada con este esquema que permite la interacción con los sedimentos, y la línea roja la temperatura del agua simulada solo para la columna de agua, considerando una condición de borde adiabática en los sedimentos. Aún cuando los valores medio diario de ambas simulaciones son similares, la oscilación térmica en el caso sin sedimentos es considerablemente mayor que la amplitud térmica simulada al considerar los sedimentos. Esto tiene directas implicancias en, por ejemplo, las tasas de evaporación que son dependientes de la temperatura del agua.

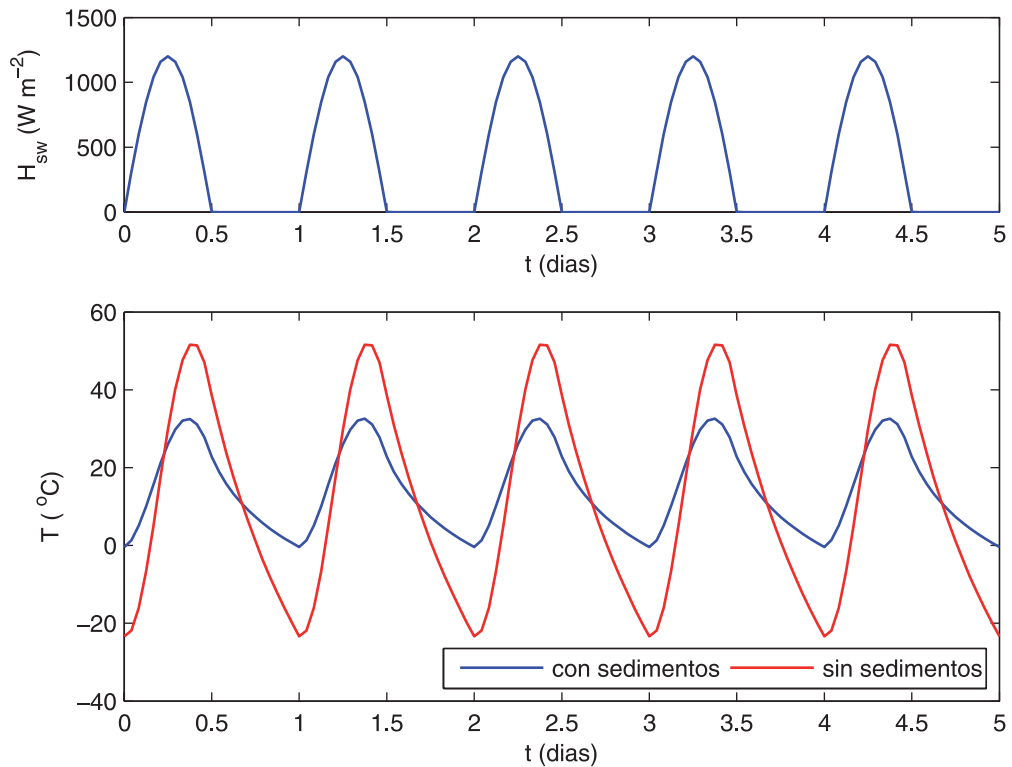


Figura 3: a) serie de tiempo de radiación solar incidente, b) serie de tiempo de temperatura promedio del agua simulada considerando intercambio calórico en sedimentos (línea azul), y sin considerarlo (línea roja).

4. Comentarios Finales

El objetivo de este trabajo es presentar de forma resumida la aplicación del esquema de volúmenes finitos para la resolución numérica de la ecuación de difusión-reacción. Esperamos haber podido demostrar que la resolución numérica de estos problemas es simple, y no necesariamente requiere grandes recursos computacionales, mientras que constituye una herramienta flexible y poderosa para estudiar problemas de interés práctico que involucran distintos procesos físicos, químicos y/o biológicos. Nuestra intención es que este resumen útil para profesionales que se ven enfrentados a encontrar soluciones simples e innovadoras a problemas de ingeniería que requieren pueden ser modelados a través de ecuaciones diferenciales similares a la ecuación de difusión-reacción analizada en este artículo.

Por último, no podemos terminar sin recordar que el cálculo numérico en general, y la solución numérica de ecuaciones diferenciales en particular, son aproximaciones que tienen errores y limitaciones producto de diferentes factores tales como: técnicas de discretización, restricciones de estabilidad, métodos de solución de sistemas matriciales, e incluso la forma en que los números son internamente representados en un computador. Por lo tanto, cualquier aplicación profesional de estas técnicas debiera cuantificar estos errores para tener certeza de la calidad de los resultados que se obtienen. Un análisis exhaustivo de la magnitud y fuentes de estos errores escapa a la motivación de este artículo, por lo que recomendamos consultar alguna de los muchos y excelentes libros o documentos técnicos que se han escrito al respecto, algunos de los cuales aparecen listados en las referencias de este trabajo.

Referencias

- Batchelor, G.K., 1967. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press.
- Bogan, T. Mohseni, O. and Stefan, H. 2003. Stream temperature–equilibrium temperature relationship. *Water Resour. Res.* 39:1245.
- de la Fuente, A. and Niño, Y. 2010. Temporal and spatial features in the thermo-hydrodynamics of a shallow salty lagoon in Northern Chile. *Limnol. Oceanogr.* 55: 279-288.
- Fang, X. and H.G. Stefan 1998. Temperature Variability in Lake Sediments. *Water Resour. Res.* 34:717-729.
- Fischer H, List E, Koh R, Imberger J, Brooks N (1979) *Mixing in Inland and Coastal Waters*. Academic Press, New York, USA
- Garratt, J. R. 1992. *The atmospheric boundary layer*. Cambridge University Press.
- Goudsmit, G., Burchard, H., Peeters, F., and Wüest, A. (2002). Application of $kk-\epsilon$ turbulence models to enclosed basins: The role of internal seiches. *J. Geophys. Res.*, 107(C12), 3230.
- Hamilton, D. P. and Mitchell, S. (1996) An empirical model for sediment resuspension in shallow lakes. *Hydrobiologia* 317: 209-220.
- Jørgensen, S., & Bendoricchio, G. 2001. *Fundamentals of Ecological Modelling*. Elsevier Science and Technology.
- Organización Mundial de la Salud, OMS, (2003). *Guidelines for safe recreational water environments*. Volume 1. Coastal and fresh waters. Capítulo 8. Pp 136-155.
- Patankar, S. 1980. *Numerical heat transfer and fluid flows*. Taylor & Francis Ed.
- Rodi, W., *Turbulence models and their application in hydrodynamics—A state of the art review*, Univ. of Karlsruhe, Karlsruhe, Germany, 1984.
- Smith J. D. and McLean, S. R. 1977. Spatially averaged flow over a wavy surface. *J. Geophys. Res.* 82: 1735-1746.
- Versteeg H.K., and Malalasekera, W. 1995. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics. The Finite Volume Methods*. Longman Group Ltd.

Titulados 2013



UNIVERSIDAD
DE CONCEPCION



UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA



Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Civil

Krogh Navarro, Sebastián Alberto
2013

Avances en la Modelación Hidrológica de Gran Escala en Cuencas Patagónicas mediante la Incorporación de Reanálisis Climatológicos: Aplicación a la Cuenca del Río Baker, Región de Aysén
Ingeniería Civil Mención Hidráulica, Sanitaria y Ambiental. Magíster en Recursos y Medio Ambiente Hídrico

Profesor Guía: James Mc Phee T.

Ibarra Sánchez, Germán Esteban
2013

Efecto de la Operación Hydropeaking en la Hidrodinámica de un Embalse Estratificado : Embalse Rapel, Chile Central
Ingeniería Civil Mención Hidráulica, Sanitaria y Ambiental. Magíster en Recursos y Medio Ambiente Hídrico

Profesor Guía: Alberto de la Fuente S.

Paez Burgos, Felipe Alberto
2013

Comportamiento de un Modelo Hidrológico Distribuido Frente a la Incertidumbre de la Temperatura del Aire

Ingeniería Civil Mención Hidráulica, Sanitaria y Ambiental

Profesor Guía: Ximena Vargas M.

Guzmán Arce, Carla Alejandra
2013

Incorporación de Consideraciones Ambientales en la Operación Horaria del Embalse Rapel
Ingeniería Civil Mención Hidráulica, Sanitaria y Ambiental

Profesor Guía: Marcelo Olivares A.

Correa Jeria, Lucas Raimundo

2013

Generación de Energía Hidroeléctrica en Canales de Regadío

Ingeniería Civil Mención Hidráulica, Sanitaria y Ambiental

Profesor Guía: Manuel Madrid A.

Figueroa Leigh, Eugenio

2013

Evaluación de una Planta Piloto de Remoción de Arsénico por Adsorción mediante un Medio Agarroso

Ingeniería Civil Mención Hidráulica, Sanitaria y Ambiental

Profesor Guía: Maria Pia Mena P.

Fuentes Olivares, Iván Antonio

2013

Evaluación de la Norma Secundaria de Calidad Ambiental para la Protección de las Aguas Continentales Superficiales de la Cuenca del Río Bio-Bío

Ingeniería Civil Mención Hidráulica, Sanitaria y Ambiental

Profesor Guía: Marcelo Olivares A.

Lapi Jorquera, Bruno Alessandro

2013

Estudio de la Convección Penetrativa mediante el Uso de Piv y Video

Ingeniería Civil Mención Hidráulica, Sanitaria y Ambiental

Profesor Guía: Yarko Niño C.

Hubner Torres, Carlos Martín

2013

Análisis Comparativo de Modelos Numéricos de Elementos Finitos en Dos y Tres Dimensiones

Aplicados a Estudios de Distribución de Presión de Poro en Minería

Ingeniería Civil Mención Hidráulica, Sanitaria y Ambiental

Profesor Guía: Rodrigo González A.

Gómez Zavala, Tomás Ignacio

2013

Análisis del Impacto del Cambio Climático en la Generación Hidroeléctrica de Centrales de la Cuenca del Alto Cachapoal

Ingeniería Civil Mención Hidráulica, Sanitaria y Ambiental

Profesor Guía: Ximena Vargas M.

Vargas Donoso, Cristóbal Andrés

2013

Actualización del Modelo Hidrogeológico en la Cuenca del Río Copiapó para el Acuífero entre la Puerta y Angostura

Ingeniería Civil Mención Hidráulica, Sanitaria y Ambiental

Profesor Guía: Julio Cornejo M.



Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Hidráulica y Ambiental

Huber Soto, Gabriel Cristian Alejandro

2013

Spreads de liquidez en bonos corporativos: un modelo dinámico y su aplicación a un mercado con pocas transacciones.

Ingeniero Civil en industrias, Diploma en Ingeniería Hidráulica

Profesor Guía: Gonzalo Cortázar Sanz

González Valderrama, Virginia Isabel

2013

Efecto de la discretización de la cuenca y modelo digital de elevaciones en la estimación de la erosión hídrica en cuencas de gran tamaño

Magister en Ciencias de la Ingeniería

Profesor Guía: Carlos Alberto Bonilla Melendez

Jaen Sarmiento, Daniel

2013

Modelo estocástico de lluvia-escorrentía utilizando teoría de colas

Magister en Ciencias de la Ingeniería

Profesor Guía: Bonifacio Fernández Larranaga

Valenzuela Demarco Francisco José

2013

Ingeniero Civil, Diploma en Ingeniería Hidráulica

García Grez, Felipe José

2013

Ingeniero Civil, Diploma en Ingeniería Hidráulica

Thenoux Acuña Michelle Dominique Teresita

2013

Efecto y relevancia de la red artificial de drenaje y la distribución espacial de impermeabilidad en los impactos hidrológicos.

Ingeniero Civil, Diploma en Ingeniería Hidráulica

Profesor Guía: Jorge Alfredo Gironas León

Uribe Barrera, Javier

2013

Estimación de la recarga del acuífero Salar del Huasco en base a un modelo de precipitación-escurrimiento y una caracterización isotópica.

Ingeniero Civil, Diploma en Ingeniería Hidráulica

Profesor Guía: José Francisco Muñoz Pardo

De la Fuente Saavedra, Felipe

2013

Ingeniero Civil, Diploma en Ingeniería Hidráulica

Gelerstein Waisbein, Alejandra Natalia

2013

Ingeniero Civil, Diploma en Ingeniería Hidráulica

Jara Oliveri, Cristian Rodrigo

2013

Ingeniero Civil, Diploma en Ingeniería Hidráulica

Gaido Lasserre, Camila

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Hidráulica

Astudillo Bessi Francisca Andrea

2013

Consideraciones para la implementación de tecnologías de información y comunicación para la enseñanza-aprendizaje: aplicación en el área de matemáticas en enseñanza básica.

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Hidráulica

Profesor Guía: Nicolás Sergio Majluf Sapag

Scholl Mandujano Matías

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Hidráulica

Vial Birrell Nicolás Agustín

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Hidráulica

Arriagada Sánchez, Ignacia Paulina

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Hidráulica

Méndez Brinck, Renato Javier

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Hidráulica

Lederman Scholem, Abraham Josef

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Hidráulica

Zaldivar Kunstmann, María Ignacia

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Hidráulica

Barros Soffia, Tomás Germán

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Hidráulica

Ramírez Rondo, María Francisca

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Hidráulica

Marza Varas, Tomás Ignacio

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Hidráulica

Montoya Bellesty, Raimundo Francisco

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Hidráulica

Zanforlin Sandoval, Camila Anabella

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Hidráulica

Buchheister Arrau, María Trinidad Ana

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Hidráulica

Engdahl Toledo, Pablo Ignacio

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Hidráulica

Castillo Guerrero, Francisca Belén

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Hidráulica

Fuenzalida Ríos, Víctor Manuel

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Hidráulica

García Ulibarri, María Ximena

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Hidráulica

Tagle Correa, Magdalena

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Hidráulica

Valdés Donoso, Valentina Myriam

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Hidráulica

Reyes Cosmelli Javier Ignacio

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Hidráulica

López Olivares, Carolina Alejandra

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Hidráulica

Sas Brunser, Sebastian Marcos

2013

Análisis Económico-Energético de la Biomasa Lignocelulosica en Chile.

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Ambiental

Profesor Guía: César Antonio Saez Navarrete

Majluf Cáceres, Ignacio Joaquín

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Ambiental

Factores mas relevantes para el éxito en la introducción de un nuevo producto al mercado: Una aplicación al caso cava soler jové en Chile.

Profesor Guía: Sergio Maturana Valderrama

Larraín Mac-Lean, Macarena Amparo María

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Ambiental

Seoane Magnasco, Fernanda Ana María

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Ambiental

Ruiz Wood, Macarena Paz

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Ambiental

Jara Burchardt, Felipe Andrés

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Ambiental

Cruz Infante, Martín Francisco

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Ambiental

Rojas Flores, Herlen Elizabeth

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Ambiental

Messer Villarroel, Natalie Jacqueline

2013

Políticas de fomento para las energías renovables no convencionales (ERNCC)

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Ambiental

Profesor Guía: Enzo Enrique Sauma Santis

Morel Borchers, Jorge Andrés

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Ambiental

Yung Ramos, Alejandro

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Ambiental

Contardo Kruger, Francisca Antonia

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Ambiental

Apip Santacana, Christian Alfredo

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Ambiental

León Urrutia, Mila del Carmen

2013

Marketing predictivo: herencia de audiencia en el noticiario central de mega.

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Ambiental

Profesor Guía: Sergio Maturana Valderrama

Minguez Vartgas, Andrés Patricio

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Ambiental

Novoa Matte, José Tomás

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Ambiental

Ponce Riady, Rodolfo Alejandro

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Ambiental

Greza Valdés, Matía Teresa de Jesús

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Ambiental

Raby Valdivieso, Arturo Tomás

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Ambiental

Fischer Montt, Diego Alejandro

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Ambiental

Solari Grunwald, Stefano Alessandro

2013

Ingeniero Civil de Industrias, Diploma en Ingeniería Ambiental



Universidad de Concepción
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Civil

Felipe Ricardo Correa González

2013

Actualización de los Estudios Hidrológicos del Plan Maestro de Evacuación y Drenaje de Aguas Lluvias de Concepción. Análisis Hidráulico de la Zona Norponiente de Concepción

Profesor Guía: José Vargas Baecheler

Ignacio Antonio Charlin Reyes

2013

Muestreo y Caracterización de los suelos de la cuenca alta del Río Malleco para modelación Hidrológica distribuida

Profesor Guía: Oscar Link Lazo- Alejandra Stehr

Gustavo Andrés Rey Hernández

2013

Estudio experimental de la socavación a la salida de un puente cajón doble

Profesor Guía: Oscar Link Lazo

Felipe González Sánchez

2013

Sesgo al estimar ADCP la velocidad media en una vertical

Profesor Guía: Claudio Meier Vargas

Alvaro Oñat Hermosilla

2013

Comportamiento espacial y temporal de los niveles freáticos y piezométricos en una barra medial de grava durante una crecida

Profesor Guía: Claudio Meier Vargas

Ergon Jofre Mella

2013

Dinámica del flujo Hiporreico en la zona de transición entre ríos confinados de montaña y valles aluviales principales

Profesor Guía: Claudio Meier Vargas



Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento de Obras Civiles

Covacevich Fugellie, Jeronimo

2013

Estudio de Viabilidad Técnico-Económica del Embalse Tunquén como Fuente de Abastecimiento de Agua Potable del Litoral Sur de la Región de Valparaíso.

Profesor Guía: Raúl Galindo

Sotomayor Abarzua, Giancarlo

2013

Optimización de los Sistemas de Producción, Transferencia y Distribución de Agua Potable en la Localidad de la Calera

Profesor Guía: Raúl Galindo

Villalobos Irigoyen, César Andrés

2013

Alternativas de Cierre Limpio de Depositos de Relaves (Caso: Tranque Barahona o División el Teniente Codelco).

Profesor Guía: Ludwig Stowhas

Parkes Valenzuela, Etman

2013

Comparación de Resultados de Modelos para Fluidos no-Newtonionianos en Canales Abiertos.

Profesor Guía: Diego Rojas

Osorio Uribe, Eduardo Alfonso

2013

Metodología de Valoración de Suelo Urbano mediante la simulación de Proyecto Inmobiliario

Profesor Guía: Raúl Galindo

Segura Torres, Roy Walter

2013

Modelación Tridimensional en Software CFD de un Canal con Ensanche y Grada de Bajada

Profesor Guía: Patricio Catalán

Hernández Jara, Héctor Enrique

2013

Análisis del comportamiento de parametros en modelo simulación de caudales en cuencas nivopluviales

Profesor Guía: Ludwig Stowhas

Maripangui Morales, Javier Ignacio

2013

Cálculo de Coeficientes Precipitación área de zonas altiplánicas de Chile

Profesor Guía: Pedro Kamann

Loyola Nuñez, Oscar Patricio

2013

Caracterización Estadística de Datos de Oleaje

Profesor Guía: Patricio Catalán

Pérez Lolas, Alejandro Andrés

2013

Influencia de la Temperatura de lluvia en el Derretimiento de un Manto de Nieve.

Profesor Guía: Ludwig Stowhas

Torres Canales, Hugo José

2013

Metodología para el Cálculo de la capacidad de captación de sumideros de Aguas lluvias más utilizados en Chile.

Profesor Guía: Patricio Catalán

ARENAS RODRIGUEZ, PAULINA

2013

Cavitación en Rápidos de Descargas.

Profesor Guía: Ludwig Stowhas

Morales Miranda, Luis Felipe

2013

Análisis Teórico de la Reducción de presiones en la red de Pucón y su impacto en la disminución de la producción de Agua Potable.

Profesor Guía: Raúl Galindo

Lorca Fagandini, Francisco Javier

2013

Consideraciones de Diseño para canales Naturales Compuestos por Rápidos y Piscinas

Profesor Guía: Ludwig Stowhas

López Donoso, Fernando Andrés

2013

Análisis del comportamiento hidráulico de soluciones obtenidas en la lixiviación de Minerales de Óxido.

Profesor Guía: Raúl Galindo

Canales Pozo, Guillermo Antonio

2013

Uso de sistemas fotovoltaicos orientado al desarrollo de proyectos de agua potable rural.

Profesor Guía: Ludwig Stowhas

Martínez Miranda, Jorge Iván

2013

Estudio de la Infiltración de Napas e Ingreso de Aguas lluvias a los Sistemas de Recolección "Caso Localidad de los Muermos"

Profesor Guía: Ludwig Stowhas



Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Facultad de Ingeniería
Carrera de Ingeniería Civil

JUAN PABLO

2013

Prefactibilidad técnica de embalses en la zona de Llampaico

Profesor Guía: Jackelline González

VICTOR MARCELO

2013

Período de retorno de sequía meteorológica de la comuna de Casablanca

Profesor Guía: Jackelline González

MARIA JOSÉ

2013

Análisis de sensibilidad del cálculo del caudal de diseño para obras de drenaje según el método racional

Profesor Guía: Alexandra Jacquin

PABLO ANTONIO

2013

Aplicación del método de Sobol en el análisis de sensibilidad del modelo de simulación hidrológica HBV

Profesor Guía: Alexandra Jacquin

CAMILO IGNACIO

2013

Evaluación del desempeño del modelo multilineal de retraso para el tránsito de niveles en el río Elqui

Profesor Guía: Jackelline González



Universidad de la Serena
Departamento de Ingeniería en Minas

Verónica Nuñez

2013

Estudio de la información ambiental y de riesgos naturales disponible para la comuna de La Serena y su entorno. Análisis de su incorporación a modificaciones del Plan Regulador. Ingeniería Civil Ambiental

Profesor Guía: Jorge Oyarzún

Sandro Zambra

2013

Caracterización de la Interacción Agua Superficial-Agua Subterránea en la Cuenca del Río Grande
Ingeniería Civil Ambiental

Profesor Guía: Ricardo Oyarzún

Hector Maureira

2013

Caracterización Geohidrológica de la Cuenca del Río Diguillín
Ingeniería Civil Ambiental

Profesor Guía: Ricardo Oyarzún

Jorge Cubillos

2014

Transporte de Contaminantes en Sistemas Fluviales y Evaluación de la Aplicabilidad del Modelo WASP en las Cuencas de los ríos Elqui y Choapa, Región de Coquimbo
Ingeniería Civil Ambiental

Profesor Guía: Ricardo Oyarzún

Diego Villanueva

2013

Proceso Operacional Tranque el Mauro - MLP

Ingeniería Civil

Profesor Guía: Edmundo Gonzalez

Mauricio Castillo

2013

Estudio de Crecidas en la Cuenca del Río Elqui Mediante Software HEC-HMS

Ingeniería Civil

Profesor Guía: Edmundo Gonzalez

Marco Silva

2013

Método de las Trazas de Crecida, para establecer zonas de Inundación en Tramo del Río Tinguiririca, Ciudad de San Fernando

Ingeniería Civil

Profesor Guía: Edmundo Gonzalez

Catherine Marzal

2013

Impacto del cambio climático sobre la disponibilidad del recurso hídrico en la cuenca del Río Elquí

Ingeniería Civil

Profesor Guía: Edmundo Gonzalez

Patricio Rojas Piñones

Desarrollo de Módulos en Entorno Visual Basic para resolver problemas de Hidráulica de Conducciones Gravitacionales

Ingeniería Civil

Profesor Guía: Victor Aros Araya

Franchesca Contreras Campos y Carolina Pizarro Paz

2013

Estudio de Factibilidad del Embalse "Paso del Buey", para aprovechamiento en riego, energía hidroeléctrica y agua potable, Comuna de Combarbalá, Región de Coquimbo.

Ingeniería Civil

Profesor Guía: Víctor Aros Araya

Ana Gutiérrez Uribe

2013

Evaluación del gasto sólido de fondo, en el río Elqui, en el tramo comprendido entre el Embalse Puclaro y la ciudad de La Serena.

Ingeniería Civil

Profesor Guía: Víctor Aros Araya

Camila Muñoz Muñoz

2013

Diseño de drenes de Aguas Lluvias con Captación de Napas Subterráneas.

Ingeniería Civil

Profesor Guía: Víctor Aros Araya

Cristian Pereira Yañez

2013

Sistema de Registro para Mejoramiento Integral de redes de distribución de Agua Potable mediante un servidor de aplicaciones.

Ingeniería Civil

Profesor Guía: Alan Olivares Gallardo.

Carolina Aguilera Campillay.

2013

Análisis del sistema de producción y regulación de agua potable para la ciudad de Ovalle.

Ingeniería Civil

Profesor Guía: Alan Olivares Gallardo.